

В. И. Арнольд

---

**Лекции об уравнениях  
с частными  
производными**

МЦНМО

В. И. Арнольд

**ЛЕКЦИИ ОБ УРАВНЕНИЯХ  
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

Электронное издание

Москва  
Издательство МЦНМО  
2018

УДК 517.95  
ББК 22.161.6  
А84

**Арнольд В. И.**

Лекции об уравнениях с частными производными.

Электронное издание.

М.: МЦНМО, 2018.

181 с.

ISBN 978-5-4439-3174-6

Данный курс был разработан и прочитан выдающимся математиком В. И. Арнольдом в Независимом московском университете. Помимо традиционных вопросов курса уравнений с частными производными (метод Даламбера, метод Фурье, краевые задачи и т. д.) автор уделяет большое внимание взаимодействию с другими областями математики: геометрией и топологией многообразий, симплектической и контактной геометрией, комплексным анализом, вариационным исчислением.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических факультетов университетов и вузов с расширенной программой по математике.



Подготовлено на основе книги:

*Арнольд В. И.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: МЦНМО, 2017. — 182 с. ISBN 978-5-4439-1174-8.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11  
тел. (499) 241-08-04  
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-3174-6

© Арнольд Э. А. (наслед.), 2017

© МЦНМО, 2017

## Оглавление

Предисловие . . . . .	5
<b>Лекция 1. Общая теория для одного уравнения первого порядка . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>Лекция 2. Общая теория для одного уравнения первого порядка (продолжение) . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>Лекция 3. Принцип Гюйгенса в теории распространения волн . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>Лекция 4. Струна (метод Даламбера) . . . . .</b>	<b>40</b>
1. Общее решение . . . . .	40
2. Краевые задачи и задача Коши . . . . .	41
3. Задача Коши для неограниченной струны. Формула Даламбера . . . . .	43
4. Полуограниченная струна . . . . .	44
5. Ограниченная струна (резонанс) . . . . .	45
6. Метод Фурье . . . . .	46
<b>Лекция 5. Метод Фурье (для струны) . . . . .</b>	<b>49</b>
1. Решение задачи в пространстве тригонометрических многочленов . . . . .	49
2. Отступление . . . . .	50
3. Формулы для решения задачи пункта 1 . . . . .	50
4. Общий случай . . . . .	51
5. Ряды Фурье . . . . .	51
6. Сходимость рядов Фурье . . . . .	52
7. Явление Гиббса . . . . .	53
<b>Лекция 6. Теория колебаний. Вариационный принцип . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>Лекция 7. Теория колебаний. Вариационный принцип (продолжение) . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>Лекция 8. Свойства гармонических функций . . . . .</b>	<b>82</b>
1. Следствия из теоремы о среднем . . . . .	85
2. Теорема о среднем в многомерном случае . . . . .	91

<b>Лекция 9. Фундаментальное решение оператора Лапласа.</b>	
<b>Потенциалы</b> . . . . .	94
1. Примеры и свойства . . . . .	95
2. Отступление. Принцип суперпозиции . . . . .	97
3. Добавление. Оценка потенциала простого слоя . . . . .	109
<b>Лекция 10. Потенциал двойного слоя</b> . . . . .	113
<b>Лекция 11. Сферические функции. Теорема Максвелла.</b>	
<b>Теорема об устранимой особенности</b> . . . . .	125
<b>Лекция 12. Краевые задачи для уравнения Лапласа.</b>	
<b>Теория линейных уравнений и систем</b> . . . . .	142
1. Внутренняя задача Дирихле . . . . .	143
2. Внешняя задача Дирихле . . . . .	143
3. Внутренняя задача Неймана . . . . .	144
4. Внешняя задача Неймана . . . . .	146
5. Линейные уравнения с частными производными и их символы . . . . .	148
<b>Приложение 1. Топологическое содержание теоремы Максвелла о мультипольном представлении сферических функций</b> . . . . .	157
1. Основные пространства и группы . . . . .	158
2. Некоторые теоремы вещественной алгебраической геометрии . . . . .	160
3. От алгебраической геометрии к сферическим функциям . . . . .	162
4. Явные формулы . . . . .	164
5. Теорема Максвелла и $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4$ . . . . .	168
6. История теоремы Максвелла . . . . .	170
<b>Приложение 2. Задачи</b> . . . . .	172
1. Материалы семинаров . . . . .	172
2. Задачи письменного экзамена . . . . .	179
<b>Литература</b> . . . . .	181

## Предисловие

Теория уравнений с частными производными считалась в середине XX века вершиной математики — как вследствие трудности и значения решаемых ею задач, так и потому, что она сформировалась позже большинства математических дисциплин.

Сегодня многие склонны пренебрежительно рассматривать эту замечательную область математики как старомодное искусство жонглирования неравенствами или как полигон для приложений функционального анализа. Соответствующий курс даже исключён из обязательной программы ряда университетов (например, в Париже). Более того, такие замечательные учебники, как классический трёхтомник Гурса, были выкинуты библиотекой университета Париж-7 за ненадобностью (и только благодаря моему вмешательству удалось спасти их, наряду с курсами лекций Клейна, Пикара, Эрмита, Дарбу, Жордана, ...).

Причина вырождения важной общематематической теории в бесконечный поток работ «Об одном свойстве одного решения одной краевой задачи для одного уравнения» состоит, вероятно, в попытке создать единую всеобъемлющую сверхабстрактную «теорию всего».

Основным источником уравнений с частными производными являются модели сплошных сред математической и теоретической физики. Попытки распространить замечательные достижения математической физики на сходные с её моделями лишь формально системы приводят к сложным и труднообозримым теориям, подобно тому, как попытки распространить геометрию поверхностей второго порядка и алгебру квадратичных форм на объекты более высоких степеней быстро заводят в дебри алгебраической геометрии с её обескураживающей иерархией сложных вырождений и вычислимыми лишь принципиально ответами.

В теории уравнений с частными производными положение ещё хуже: трудности коммутативной алгебраической геометрии соединяются здесь с некоммутативной дифференциальной алгеброй совер-

шенно неразделимым образом, и вдобавок возникающие вопросы топологии и анализа глубоко нетривиальны.

В то же время общефизические принципы и такие общие понятия, как энергия, вариационный принцип, принцип Гюйгенса, лагранжиан, преобразование Лежандра, гамильтониан, собственные числа и собственные функции, двойственность «волна-частица», дисперсионные соотношения, фундаментальные решения, прекрасно работают в многочисленных важнейших задачах математической физики. Их исследование стимулировало развитие больших отделов математики, таких как теория рядов и интегралов Фурье, функциональный анализ, алгебраическая геометрия, симплектическая и контактная топология, теория асимптотик интегралов, микролокальный анализ, теория индекса (псевдо)дифференциальных операторов и т. д.

Знакомство с этими фундаментальными математическими идеями является, на мой взгляд, абсолютно необходимым для каждого работающего математика. Их исключение из университетского преподавания математики, совершившееся или совершающееся во многих западных университетах под влиянием схоластов-аксиоматизаторов (не знакомых ни с какими приложениями и не желающих знать ничего, кроме «абстрактной чепухи» алгебраистов), представляется мне крайне опасным последствием бурбакизации и математики, и её преподавания. Стремление уничтожить ненужную схоластическую псевдонауку является естественной и законной реакцией общества (в том числе научного) на безответственную и самоубийственную агрессивность «сверхчистых» математиков, воспитанных в духе Харди и Бурбаки.

Автор этого очень короткого курса лекций старался познакомить с калейдоскопом фундаментальных идей математики и физики студентов-математиков с минимальными познаниями (линейная алгебра и основы анализа, включая обыкновенные дифференциальные уравнения). Вместо обычного в математических книгах принципа наибольшей общности автор старался придерживаться принципа минимальной общности, согласно которому каждая идея должна быть вначале ясно понята в простейшей ситуации и только затем развитый метод может переноситься на более сложные случаи.

Хотя доказательство общего факта обычно бывает проще, чем доказательство его многочисленных частных случаев, содержание математической теории для обучающегося не больше, чем набор хорошо и до конца понятых им примеров. Поэтому именно примеры и идеи,

а не общие теоремы и аксиомы, составляют основу этой книги. Экзаменационные задачи в конце курса составляют существенную его часть.

Особое внимание было уделено взаимодействию предмета с другими областями математики: геометрией многообразий, симплектической и контактной геометрией, комплексным анализом, вариационным исчислением, топологией. Автор рассчитывал на любознательного студента, но надеется, что даже профессиональные математики других специальностей смогут по этой книжке с основными и потому простыми идеями математической физики и теории уравнений с частными производными.

Настоящий курс был прочитан студентам третьего курса Математического колледжа Независимого московского университета в осеннем семестре 1994/95 учебного года, причём лекции 4 и 5 были прочитаны Ю. С. Ильяшенко, лекция 8 — А. Г. Хованским. Все лекции были записаны В. М. Имайкиным (составленный им конспект был затем переработан автором). Автор выражает всем им глубокую благодарность.



## Лекция 1

# Общая теория для одного уравнения первого порядка

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, нет единой теории уравнений с частными производными. Некоторые уравнения имеют свои теории, для других теории нет вообще. Это связано с более сложной геометрией. В случае обыкновенного уравнения на многообразии задано векторное поле, которое локально интегрируемо (имеет интегральные кривые). В случае уравнения с частными производными в каждой точке многообразия задано подпространство касательного пространства размерности больше 1. Как известно, уже поле двумерных плоскостей в трёхмерном пространстве в общем случае не интегрируемо.

**Пример.** В пространстве с координатами  $x, y, z$  рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением  $dz = y dx$  (в каждой точке это одно линейное уравнение на координаты касательного вектора, задающее плоскость).

**Задача 1.** Нарисуйте это поле плоскостей и докажите, что у него нет интегральной поверхности, т. е. такой поверхности, у которой в каждой точке касательная плоскость совпадает с плоскостью поля.

Таким образом, интегрируемые поля плоскостей — исключительное явление.

Подмногообразиие, касательная плоскость которого в каждой точке принадлежит подпространству поля, называется *интегральным подмногообразием* поля касательных подпространств на многообразии. Если удаётся провести интегральное подмногообразие, его размерность обычно не совпадает с размерностью плоскостей поля.

В этой лекции мы рассмотрим случай, в котором есть полная теория, а именно случай одного уравнения первого порядка. С физической точки зрения этот случай представляет собой двойственность

описания явлений при помощи волн и при помощи частиц. Поле удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных первого порядка, эволюция частиц описывается системой ОДУ, имеется приём сведения УРЧП к системе ОДУ; тем самым можно свести изучение распространения волн к изучению эволюции частиц.

Запишем всё в локальной системе координат:  $x = (x_1, \dots, x_n)$  — координаты (независимые переменные),  $y = u(x)$  — неизвестная функция координат, сама буква  $y$  обозначает координату на оси значений, частные производные обозначим  $p$ ,

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}.$$

Общее уравнение с частными производными первого порядка имеет вид

$$F(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n) = 0.$$

### Примеры.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0; \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1 \tag{1.2}$$

(уравнение эйконала в геометрической оптике);

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1.3}$$

(уравнение Эйлера).

Рассмотрим выпуклую замкнутую кривую на плоскости с координатами  $x_1, x_2$ . Вне области, ограниченной кривой, рассмотрим функцию  $u$  расстояния до этой кривой. Тогда  $u$  — гладкая функция.

**Теорема 1.** *Функция  $u$  удовлетворяет уравнению (1.2).*

**Доказательство.** В уравнении (1.2) написано, что квадрат градиента функции  $u$  равен 1. Напомним геометрический смысл градиента: это вектор, в направлении которого скорость изменения функции наибольшая, а его длина равна абсолютной величине этой скорости. Теперь утверждение теоремы очевидно.  $\square$

**Задача 2.** а) Докажите, что любое решение уравнения (1.2) локально является суммой расстояния до некоторой кривой и константы.

б) Поймите, где тут двойственность описания при помощи волн и частиц (в случае затруднений ср. ниже с. 23, рис. 2.2).

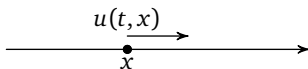


Рис. 1.1. Частица на прямой

Рассмотрим поле  $u(t, x)$  скоростей свободно двигающихся по прямой частиц (см. рис. 1.1). Закон свободного движения частицы имеет вид

$$x = \varphi(t) = x_0 + vt,$$

где  $v$  — скорость частицы. Функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Ньютона  $d^2\varphi/dt^2 = 0$ . Дадим теперь описание движения через поле  $u$  скоростей: по определению  $d\varphi/dt = u(t, (\varphi(t)))$ . Дифференцируем по  $t$  и получаем уравнение Эйлера:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u_t + u_x u = 0.$$

Обратно, из уравнения Эйлера можно вывести уравнение Ньютона, т. е. эти описания движения при помощи уравнения Эйлера для поля и при помощи уравнения Ньютона для частиц эквивалентны. Мы и в общем случае построим процедуру, позволяющую свести уравнения для волн к уравнениям эволюции частиц. Но сначала рассмотрим более простые примеры линейных уравнений.

1. Пусть  $v = v(x)$  — векторное поле на многообразии или в области евклидова пространства. Рассмотрим уравнение  $L_v(u) = 0$ , где оператор  $L_v$  обозначает производную по направлению векторного поля (производную Ли).

В координатах это уравнение имеет вид

$$v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0;$$

оно называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка*.

Чтобы функция  $u$  была его решением, необходимо и достаточно, чтобы она была постоянна вдоль фазовых кривых поля  $v$ . Таким образом, *решения нашего уравнения — первые интегралы поля*.

Например, рассмотрим поле

$$v = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

см. рис. 1.2. Решим уравнение  $L_v(u) = 0$  для этого поля  $v$ . Фазовые кривые — лучи  $x = e^t x_0$ , выходящие из начала координат. Решение

должно быть постоянно на каждом таком луче. Если наложить условие непрерывности в начале координат, то получим, что решения — константы и только они. Константы образуют одномерное линейное пространство (решения линейного уравнения должны образовывать линейное пространство).

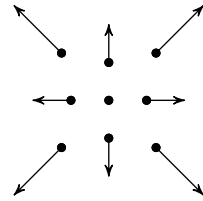


Рис. 1.2. Эйлерово поле

В отличие от этого примера, в общем случае решения линейного УРЧП образуют бесконечномерное линейное пространство. Например, для уравнения  $\partial u / \partial x_1 = 0$  пространство решений совпадает с пространством функций от  $n - 1$  переменных:  $u = \varphi(x_2, \dots, x_n)$ .

Оказывается, то же самое верно для уравнения общего положения в окрестности регулярной точки.

**Задача Коши.** Пусть  $\Gamma^{n-1}$  — гладкая гиперповерхность в  $x$ -пространстве. *Задачей Коши* называется следующая задача: найти решение уравнения  $L_v(u) = 0$ , совпадающее на гиперповерхности с заданной функцией (см. рис. 1.3).

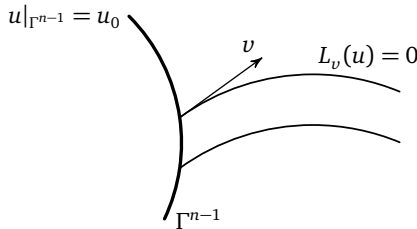


Рис. 1.3. Задача Коши

Точка гиперповерхности называется *нехарактеристической*, если поле  $v$  в ней трансверсально поверхности.

**Теорема 2.** *Задача Коши однозначно разрешима в окрестности каждой нехарактеристической точки.*

**Доказательство.** При помощи гладкой замены переменных выпрямим векторное поле, а  $\Gamma$  превратим в гиперплоскость  $x_1 = 0$ . Тогда в малой окрестности нехарактеристической точки получим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u|_{0, x_2, \dots, x_n} = u_0(x_2, \dots, x_n),$$

которая решается однозначно. □

2. Рассмотрим задачу Коши для более общего — *линейного неоднородного уравнения*:

$$L_v(u) = f, \quad u|_{\Gamma^{n-1}} = u_0.$$

Решения такой задачи образуют *аффинное* пространство (общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного).

Гладкой заменой переменной задача приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u|_{0, x_2, \dots, x_n} = u_0(x_2, \dots, x_n).$$

Эта задача решается однозначно:

$$u(x_1, \dots) = u_0(\dots) + \int_0^{x_1} f(\xi, \dots) d\xi.$$

3. *Квазилинейным* называется уравнение, линейное по производным. В координатах квазилинейное уравнение первого порядка имеет вид

$$a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u). \quad (1)$$

Заметим, что в первых двух случаях поле  $v$  связано с дифференциальным оператором инвариантно (независимо от координат). Как инвариантно связать геометрический объект с квазилинейным уравнением?

Рассмотрим пространство с координатами  $(x_1, \dots, x_n, y)$  — пространство *0-струй функций* от  $(x_1, \dots, x_n)$ , обозначаемое  $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  или, короче,  $J^0$ .

Напомню, что *пространством  $k$ -струй функций* от  $(x_1, \dots, x_n)$  называется пространство многочленов Тейлора степени  $k$ .

Заметим, что аргумент  $(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n)$  в уравнении 1-го порядка является 1-струей функции. Поэтому уравнение 1-го порядка можно понимать как гиперповерхность в пространстве 1-струй функций  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Пространство 1-струй вещественнозначных функций от  $n$  переменных можно отождествить с  $(2n + 1)$ -мерным пространством:  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2n+1}$ . Например, для функций на плоскости получаем пятимерное пространство 1-струй.

Решение уравнения (1) строится при помощи его характеристик (кривых специального вида в  $J^0$ ). Слово «характеристический» в математике всегда означает «инвариантно связанный». Например, характеристический многочлен матрицы оператора инвариантно связан

с оператором и не зависит от базиса, при помощи которого составлена матрица. Характеристические подгруппы группы — это подгруппы, инвариантные относительно автоморфизмов группы. Характеристические классы в топологии инвариантны относительно соответствующих отображений.

Векторное поле  $v$  (в пространстве независимых переменных) называется *характеристическим полем* линейного уравнения  $L_v(u) = f$ .

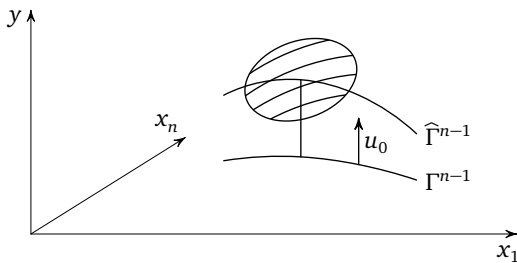
**Определение.** *Характеристическим полем квазилинейного уравнения (1) называется векторное поле  $A$  в пространстве  $J^0$  с компонентами  $(a_1, \dots, a_n, f)$ .*

**Утверждение.** *Направление этого поля является характеристическим.*

Действительно, пусть  $u$  — решение. График его — некоторая гиперповерхность в  $J^0$ . Эта гиперповерхность касается поля  $A$ , что выражено в уравнении. Верно и обратное: если график функции всюду касается поля  $A$ , то она является решением.

Отсюда становится ясным способ решения квазилинейного уравнения. Проведём в  $J^0$  фазовые кривые характеристического поля. Они называются характеристиками. Если характеристика имеет общую точку с графиком решения, то она вся лежит на нём, так что график составлен из характеристик.

*Задача Коши для квазилинейного уравнения ставится аналогично предыдущим случаям. А именно, пусть в  $x$ -пространстве задана гладкая гиперповерхность  $\Gamma^{n-1}$ , а на ней — начальная функция  $u_0$ . График этой функции есть поверхность  $\hat{\Gamma}$  в  $J^0$ , которую мы рассматриваем в качестве начального подмногообразия (см. рис. 1.4).*



**Рис. 1.4.** Характеристики квазилинейного уравнения, проходящие через начальное многообразие  $\hat{\Gamma}^{n-1}$

Если характеристики не касаются начальной гиперповерхности  $\widehat{\Gamma}$ , то локально из них составляется график решения.

Нехарактеристичность точки в данном случае складывается из двух условий: поле  $A$  не должно касаться  $\widehat{\Gamma}^{n-1}$ , и, чтобы получился действительно график, вектор поля должен быть не вертикален, т. е. компонента  $a$  отлична от 0.

Точки, в которых  $a = 0$ , особые; в них дифференциальное уравнение исчезает, превращаясь в алгебраическое.

**Пример.** Для уравнения Эйлера  $u_t + uu_x = 0$  уравнение характеристик эквивалентно уравнению Ньютона:  $\dot{t} = 1, \dot{x} = u, \dot{u} = 0$ .

Теперь перейдём к общему уравнению первого порядка.

Рассмотрим пространство 1-струй  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Вместо  $\mathbb{R}^n$  можно рассмотреть  $n$ -мерное многообразие  $B^n$ , тогда получим пространство  $J^1(B^n, \mathbb{R})$ ; пусть  $(x, y, p)$  — локальные координаты в нём.

Уравнением с частными производными первого порядка будем называть гладкую гиперповерхность в  $J^1$ :  $\Gamma^{2n} \subset J^1$ .

Например, при  $n = 1$  получим неявное (не разрешённое относительно производной) ОДУ.

Оказывается, в нашем пространстве  $J^1$  имеется замечательная геометрическая структура — инвариантно заданное распределение  $2n$ -мерных гиперплоскостей. Например, при  $n = 1$  получаем поле плоскостей в трёхмерном пространстве. Структура появляется только в результате того, что пространство есть пространство 1-струй. Аналогичная структура возникает и в пространствах струй более высокого порядка, там она называется распределением Картана.

Каждая функция в пространстве  $k$ -струй имеет  $k$ -*график*. В случае 0-струй это обычный график — множество 0-струй функции:

$$\Gamma_u = \{j_x^0 u : x \in \mathbb{R}^n\} = \{(x, y) : y = u(x)\}.$$

В случае 1-струй точка 1-*графика* состоит из аргумента, значения функции и значений частных производных первого порядка:

$$\{j_x^1 u : x \in \mathbb{R}^n\} = \left\{ (x, y, p) : y = u(x), p = \frac{\partial u}{\partial x} \right\},$$

см. рис. 1.5 для  $n = 1$ . Заметим, что 1-график является сечением расслоения над областью определения.

**Замечание.** Поверхность 1-графика диффеоморфна области определения функции,  $x$  —  $n$ -мерная координата на этой поверхности; глад-

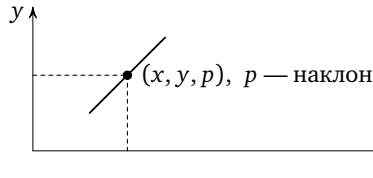


Рис. 1.5. Точка пространства 1-струй

кость поверхности меньше гладкости функции на 1, но в случае бесконечно гладкой или аналитической функции гладкость сохраняется.

Рассмотрим касательную плоскость к 1-графику. Это  $n$ -мерная плоскость в  $(2n + 1)$ -мерном пространстве.

**Теорема 3.** Все касательные плоскости всех 1-графиков в данной точке лежат в одной и той же гиперплоскости.

*Доказательство.* Вдоль любой касательной плоскости имеем

$$dy = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \sum p_i dx_i, \quad \text{или} \quad dy = p dx.$$

Поскольку в данной точке пространства 1-струй  $p$  фиксировано, получаем уравнение на компоненты касательного вектора, задающее гиперплоскость. Поэтому касательная плоскость к любому 1-графику лежит в этой гиперплоскости.  $\square$

Например, при  $n = 1$  уравнение  $dy = p dx$  задаёт вертикальную плоскость в пространстве с координатами  $x, y, p$ . Касательными к 1-графикам являются все прямые, кроме вертикальной, лежащие в этой плоскости (см. рис. 1.6).

В этом случае видно, что сама гиперплоскость есть замыкание объединения касательных ко всем 1-графикам, проходящим через данную точку.

**Задача 3.** Докажите, что это верно для любой размерности.

**Следствие.** Построенное поле гиперплоскостей  $dy = p dx$  задано инвариантно, т. е. в других координатах оно также будет задано уравнением  $d\tilde{y} = \tilde{p} d\tilde{x}$ .

**Определение.** Указанное поле гиперплоскостей в  $J^1$  называется распределением Картана или стандартной контактной структурой.

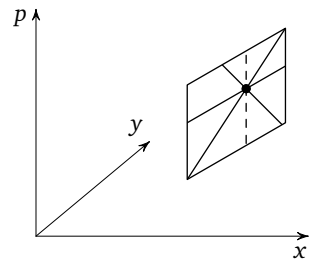


Рис. 1.6. Контактная плоскость в пространстве 1-струй



**Задача 4.** Какой размерности бывают интегральные многообразия у поля контактных плоскостей? (Многообразие называется интегральным, если в каждой точке его касательная плоскость есть подпространство контактной плоскости.)

Так как 1-график всегда является интегральным многообразием,  $n$ -мерное интегральное многообразие существует. А существуют ли многообразия большей размерности?

О т в е т. Интегральных подмногообразий, размерности которых больше половины размерности контактной плоскости, поле контактных плоскостей не имеет.

**Определение.** Интегральное подмногообразие поля контактных плоскостей, размерность которого максимальна (т. е. равна половине размерности контактной плоскости), называется *лежандровым*.

Например, 1-графики лежандровы.

Теперь вернёмся к дифференциальному уравнению.

Уравнение — это  $2n$ -мерное подмногообразие  $\Gamma^{2n}$  в  $J^1$ .

В каждой регулярной точке этой поверхности удаётся выделить характеристическое направление, определяемое поверхностью и контактной структурой. Мы построим характеристики (интегральные кривые этого поля направлений), а затем из них составим интегральные многообразия.

Рассмотрим в точке поверхности  $\Gamma^{2n}$  пересечение касательной и контактной плоскостей. Эти плоскости либо совпадают, либо имеют  $(2n - 1)$ -мерное пересечение. В первом случае точка *особая*, во втором — *регулярная*.

Заметим, что для поверхности  $\Gamma$  общего положения особые точки изолированы. Действительно, на  $\Gamma$  имеется  $2n$  координат. Рассмотрим нормаль к касательной и нормаль к контактной плоскости. Точка особая, если эти нормали имеют одинаковое направление. Это значит, что  $2n$  функций от  $2n$  переменных одновременно обращаются в 0. В общем положении это случается лишь в изолированных точках.

Итак, в регулярных точках имеются  $(2n - 1)$ -мерные пересечения касательной и контактной плоскостей. При  $n = 1$  это прямые. При  $n > 1$  — нет. Как выделить одномерное направление?

В локальных координатах контактное поле задаётся нулями 1-формы  $\alpha = dy - p dx$ , причём эту форму можно умножить на функцию, не обращающуюся в 0, — поле (контактная структура) при этом не меняется.

2-форма  $\omega^2 = d\alpha$  — внешний дифференциал формы  $\alpha$  — уже не определяется инвариантно контактной структурой, однако верно следующее.

**Предложение 1.** Форма  $\omega|_{\alpha=0}$  определена инвариантно с точностью до умножения на ненулевое число в каждой точке.

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\alpha} = f\alpha$ . Тогда  $\tilde{\alpha} = df \wedge \alpha + f d\alpha$ ,

$$d\tilde{\alpha}|_{\alpha=0} = f d\alpha|_{\alpha=0},$$

т. е.  $\tilde{\omega}^2$  отличается от  $\omega^2$  умножением на число в каждой точке (говорят, что *конформный тип* формы  $\omega^2$  определён инвариантно). Заметим, что где  $\alpha = 0$ , там и  $\tilde{\alpha} = 0$ .  $\square$

**Предложение 2.** Форма  $\omega|_{\alpha=0}$  является симплектической структурой.

Напомню, что *симплектической структурой* называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма в чётномерном пространстве.

Невырожденность формы  $\omega$  означает, что  $\forall \xi \neq 0 \exists \eta: \omega(\xi, \eta) \neq 0$ .

**Доказательство предложения 2.** В локальных координатах наша форма имеет вид

$$d\alpha = - \sum dp_i \wedge dx_i,$$

где  $p_i, x_i$  — координаты в плоскости  $\alpha = 0$ .  $\square$

**Упражнение.** Выпишите матрицу формы  $\sum dp_i \wedge dx_i$  и убедитесь, что форма невырожденна.

Эта форма называется *кососкалярным произведением*. Выясним его геометрический смысл.

Пусть  $n = 1$ . Тогда  $\omega = dx \wedge dp$ . Значение этой формы на паре векторов есть ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы (см. рис. 1.7). В случае большей размерности  $\omega(\xi, \eta)$  есть сумма ориентированных площадей проекций параллелограмма со сторонами  $\xi, \eta$  на плоскости с координатами  $(x_i, p_i)$ .

Вспомним, что в евклидовом пространстве имеется понятие ортогонального дополнения. В  $n$ -мерном пространстве ортогональное дополнение к  $k$ -мерному подпространству является  $(n - k)$ -мерным подпространством. Для доказательства этого факта нужна только

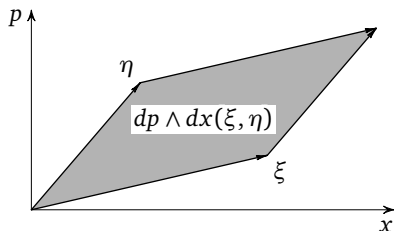


Рис. 1.7. Симплектическая структура

билинейность и невырожденность скалярного произведения, а симметричность не нужна, значит, то же самое верно и в случае кососкалярного произведения.

Итак, косоортогональным дополнением к  $(2n - 1)$ -мерной плоскости в  $2n$ -мерном симплектическом пространстве является прямая. Но, в отличие от евклидова случая, она лежит в этой плоскости!

**Лемма.** Косоортогональное дополнение к гиперплоскости в симплектическом пространстве есть прямая, лежащая в этой гиперплоскости.

**Доказательство.** Пусть прямая натянута на вектор  $\xi$ . Косоортогональное дополнение к ней есть гиперплоскость  $\{\eta: \omega(\xi, \eta) = 0\}$ . Вектор  $\xi$  лежит в этой гиперплоскости, так как

$$\omega(\xi, \xi) = -\omega(\xi, \xi) = 0. \quad \square$$

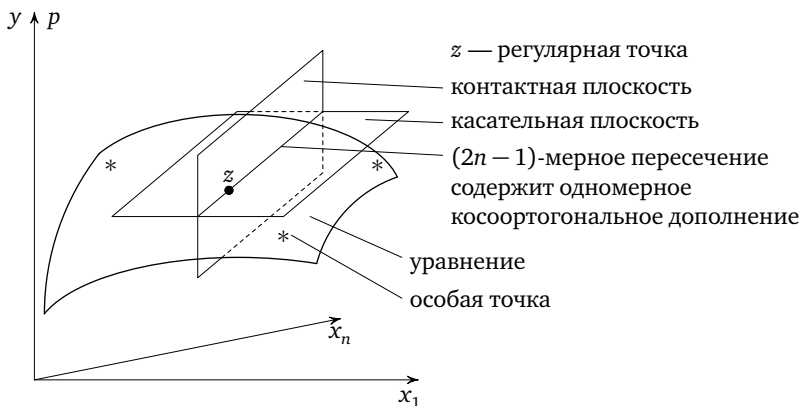


Рис. 1.8. Характеристическое направление для общего уравнения первого порядка

**Определение.** *Характеристическим направлением* в контактной плоскости называется косоортогональное дополнение к пересечению контактной и касательной к  $\Gamma$  плоскостей в регулярной точке.

Это косоортогональное дополнение — прямая. Итак, имеются инвариантная контактная структура и инвариантное отношение косоортогональности в каждой контактной плоскости. Тем самым в каждой регулярной точке инвариантно выделяется характеристическое направление (см. рис. 1.8).

*Характеристиками* называются интегральные кривые этого поля направлений.

**Задача 5.** Вычислите характеристическое поле направлений в координатах  $x, y, p$ , т. е. задайте его системой дифференциальных уравнений  $\dot{x} = ?$ ,  $\dot{y} = ?$ ,  $\dot{p} = ?$

ЛИТЕРАТУРА К ЛЕКЦИИ 1: [1, гл. 2], [4, § 11].

## Лекция 2

# Общая теория для одного уравнения первого порядка (продолжение)

Мы рассматриваем общее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка  $F(x, y, p) = 0$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_i = \partial u / \partial x_i$ ,  $y = u(x)$  — неизвестная функция. Уравнение задаёт  $2n$ -мерную гиперповерхность  $V^{2n}$  в пространстве  $J^1$  1-струй функций от  $(x_1, \dots, x_n)$ . Каждая функция имеет 1-график в  $J^1$ ; она является решением уравнения, если её 1-график  $\Gamma^n$  есть подмногообразие в  $V^{2n}$ .

В каждой точке из  $J^1$  имеется контактная плоскость  $K^{2n}$ , заданная в локальных координатах уравнением  $dy = p dx$ ; геометрически она представляет собой замыкание объединения касательных плоскостей ко всем 1-графикам, проходящим через данную точку.

В точках поверхности  $V^{2n}$  касательная плоскость к  $V^{2n}$  пересекается с контактной плоскостью. Если пересечение  $(2n - 1)$ -мерно, то точка регулярная, иначе — особая. В общем положении особые точки изолированы. В регулярных точках  $z$  получаем распределение  $(2n - 1)$ -мерных плоскостей  $(T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}$ , которые являются подпространствами контактных плоскостей  $K_z^{2n}$ .

Каждая контактная плоскость является симплектическим пространством, структура на котором задаётся дифференциальной 2-формой  $\omega^2 = d\alpha|_{K^{2n}}$ , где  $\alpha = dy - p dx$ .

В координатах имеем

$$\omega^2 = dx \wedge dp := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i;$$

$(x, p)$  служат координатами в контактной плоскости.

**Лемма.** Форма  $\omega^2$  невырождена.

Доказательство. Матрица этой формы в координатах  $x_1, p_1, x_2, p_2, \dots$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad \square$$

Итак, форма  $\omega^2$  задаёт в  $K^{2n}$  кососкалярное произведение, к каждому подпространству в  $K^{2n}$  определено косоортогональное дополнение, которое имеет дополнительную размерность. В частности, косоортогональное дополнение к  $(2n - 1)$ -мерному пересечению  $(T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}$  одномерно. Это направление называется *характеристическим для уравнения*.

**Задача 1.** Докажите, что характеристическая прямая лежит в

$$(T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}.$$

Вычислим явно в терминах уравнения компоненты характеристического вектора. Пусть  $(x, y, p)$  — координаты в  $T_z J^1$ . Характеристический вектор должен быть касательным к  $V^{2n}$ : дифференцируя уравнение, получаем первое условие:

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_p \dot{p} = 0. \quad (2.1)$$

Далее, вектор должен лежать в контактной плоскости, отсюда второе условие:

$$\dot{y} = p \dot{x}. \quad (2.2)$$

Исключив  $\dot{y}$  из этих двух уравнений, получим уравнение  $(2n - 1)$ -мерного пересечения  $K^{2n-1}$  касательной и контактной плоскостей:

$$(F_x + F_y p) \dot{x} + F_p \dot{p} = 0. \quad (2.3)$$

Это уравнение записано в координатах  $(x, p)$ , которые мы можем считать координатами в контактной плоскости, поскольку она взаимно однозначно проектируется на гиперплоскость  $(x, p)$  в  $J^1$  (см. рис. 2.1).

Нам осталось найти косоортогональное дополнение к  $K^{2n-1}$ . Задача в принципе можно решить алгоритмически, записав соответствующую систему линейных уравнений, но мы воспользуемся одним полезным наблюдением.

Для примера рассмотрим случай  $n = 1$ , тогда значение кососкалярного произведения  $dx \wedge dp$  на паре касательных векторов  $(\dot{x}, \dot{p})$ ,

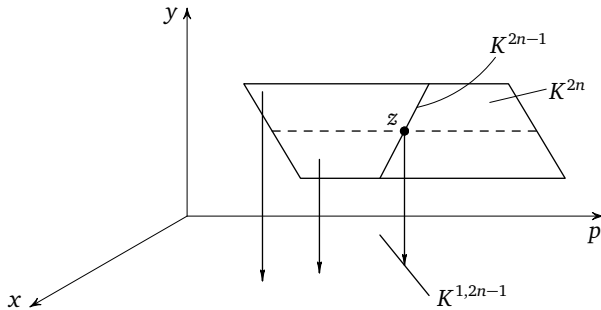


Рис. 2.1.  $x, p$  служат координатами в контактной плоскости

$(x', p')$  есть просто определитель из их координат:

$$dx \wedge dp((\dot{x}, \dot{p}), (x', p')) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{p} \\ x' & p' \end{vmatrix} = \dot{x}p' - x'\dot{p}.$$

Оказывается, то же самое верно в общем случае, если под  $x, p$  понимать векторы, а произведение рассматривать как скалярное.

**Задача 2.** Докажите, что

$$\omega^2((\dot{x}, \dot{p}), (x', p')) = \dot{x}p' - x'\dot{p}. \quad (2.4)$$

Но посмотрим внимательно на уравнение (2.3). Оно само имеет вид (2.4), т. е. выражает тот факт, что косоугловое произведение равно 0. Так что прямо из него мы выпишем вектор косоортогонального дополнения к  $K^{2n-1}$ :  $p' = F_x + pF_y$ ,  $x' = -F_p$ . Правда, по традиции характеристическим называют противоположно направленный вектор. В итоге мы доказали следующую теорему.

**Теорема 1.** *Характеристическим является поле направлений следующего векторного поля:  $x' = F_p$ ,  $p' = -(F_x + pF_y)$ ,  $y' = pF_p$  (последняя компонента находится из уравнения (2.2)).*

Заметим, что поле определяется самой функцией  $F$ , а не только её нулевой поверхностью уровня, а значит, задано во всём пространстве  $J^1$ .

**Пример 1.** Пусть  $F$  не зависит от  $y$ . Соответствующее уравнение называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Традиционное обозначение:  $F = H(x, p)$ . Уравнение Гамильтона — Якоби — это уравнение вида  $H(x, \partial u / \partial x) = 0$ . Уравнения характеристик имеют вид

$$x' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad y' = p \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (2.5)$$

Первые два уравнения — это обычные канонические уравнения Гамильтона (этим и диктуется выбор знака характеристического поля, указанный выше: для гамильтониана свободной частицы массы 1 имеем  $H = p^2/2$ ; при выбранном знаке получаем  $x' = p$ , т. е. импульс равен скорости).

Спроектировав систему (2.5) на подпространство с координатами  $(x, p)$ , получим отдельную систему уравнений в этом пространстве. Тем самым мы осуществили факторизацию или расщепление исходного уравнения (2.5). Это векторное поле в пространстве  $(x, p)$  можно задать и инвариантно, не прибегая к координатам. Поверхность исходного уравнения в  $J^1$  была цилиндрической, не менялась в зависимости от  $y$ , такая поверхность хорошо проецируется в пространство  $(x, p)$ . Гамильтоново поле задано не только на нулевой поверхности уровня  $H$ , а всюду. Функция  $H$  обычно имеет физический смысл энергии.

Пусть, например,  $H = (p^2 - 1)/2$ , тогда уравнение имеет вид  $p^2 = 1$ , или  $(\partial u / \partial x)^2 = 1$ , т. е. это уравнение эйконала геометрической оптики.

Система уравнений характеристик  $x' = p$ ,  $p' = 0$  описывает движение частиц по прямолинейным лучам с постоянной скоростью (см. рис. 2.2).

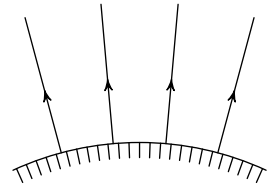


Рис. 2.2. Характеристики уравнения эйконала

Если на многообразии задана риманова метрика, то характеристики уравнения эйконала оказываются геодезическими этой метрики.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение Эйлера  $u_t + uu_x = 0$ . При  $n = 2$  пространство 1-струй  $J^1$  пятимерно,

$$F(t, x, y, p_t, p_x) = p_t + up_x.$$

Запишем систему уравнений характеристик:

$$\begin{aligned} p'_t &= -p_x p_t, & t' &= 1, \\ p'_x &= -p_x^2, & x' &= y, & y' &= p_t + p_x y = 0. \end{aligned}$$

Первые два уравнения — это так называемые сопряжённые уравнения эволюции производных, пока мы ими заниматься не будем. Займёмся оставшимися. Переменная  $t$  имеет смысл времени, остальные уравнения перепишем в виде  $dx/dt = y$ ,  $dy/dt = 0$ , откуда получим  $d^2x/dt^2 = 0$ , т. е. уравнение характеристик оказалось уравнением Ньютона, см. предыдущую лекцию.



Теперь применим характеристики к решению уравнения в общем случае.

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma^n$  — 1-график решения, и пусть характеристика проходит через точку графика. Тогда она вся лежит на  $\Gamma^n$ , т. е. график решения можно расслоить на характеристики.

**Доказательство.** Рассмотрим регулярную точку  $z$ , пусть  $\xi$  — вектор характеристического направления в точке  $z$ . Очевидно следующее.

1.  $T_z\Gamma^n \subset T_zV^{2n}$ , поскольку  $\Gamma$  — подмногообразие в  $V^{2n}$ .

2.  $T_z\Gamma^n \subset K_z^{2n}$  по определению  $K_z^{2n}$ , поэтому  $T_z\Gamma^n \subset (T_zV^{2n} \cap K_z^{2n})$ .

Заметим, что само пространство  $T_z\Gamma^n$  является  $n$ -мерным.

3. Все векторы из  $T_z\Gamma^n$  попарно косоортогональны. Действительно,  $\alpha|_{\Gamma^n} = 0$ , так как  $\Gamma^n$  — 1-график, поэтому  $d\alpha|_{\Gamma^n} = 0$ , т. е.  $\omega^2|_{\Gamma^n} = 0$ .  $\square$

**Упражнение.** Убедитесь, что в координатной записи равенство формы  $\omega^2|_{\Gamma^n}$  нулю вытекает из симметричности смешанных частных производных.

**Определение.** Подпространство симплектического пространства, все векторы которого попарно косоортогональны, называется *изотропным* (по Ли — «сумасшедшим»).

Например, на симплектической плоскости всякая прямая изотропна.

**Лемма.** Размерность изотропного подпространства в  $2n$ -мерном симплектическом пространстве не превосходит  $n$ .

(Изотропные подпространства максимальной размерности существуют и называются *лагранжевыми* подпространствами. Пример лагранжева подпространства — прямая на симплектической плоскости.)

**Доказательство леммы.** Пусть изотропное подпространство  $m$ -мерно. Как изотропное, оно содержится в своём косоортогональном дополнении, значит, размерность косоортогонального дополнения не меньше  $m$ . Имеем  $2n - m \geq m$ ,  $m \leq n$ . Лемма доказана.  $\square$

Теперь вернёмся к характеристическому вектору  $\xi$  в точке  $z$ .

**Утверждение.** Вектор  $\xi$  лежит в  $T_z\Gamma^n$ .

Допустим противное. Тогда, будучи характеристическим, вектор  $\xi$  косоортогонален  $T_zV^{2n} \cap K_z^{2n}$ . В силу свойства 2 из доказательства теоремы 2 вектор  $\xi$  косоортогонален  $T_z\Gamma^n$ . Но тогда линейная обо-

лочка вектора  $\xi$  и пространства  $T_x\Gamma^n$  является  $(n + 1)$ -мерной и изотропной ввиду свойства 3, а всё это противоречит лемме.

Итак, характеристическое направление в каждой точке касается 1-графика решения, а значит, вся характеристика лежит на графике. Теорема доказана.

Отсюда вытекает рецепт построения 1-графиков решений (заметим, что существование хотя бы одного решения пока не доказано). Надо взять  $(n - 1)$ -мерное изотропное подмногообразие поверхности  $V^{2n}$ , не касательное к характеристике, и провести через его точки характеристики, получив локально 1-график решения. Чтобы получился действительно график, нужно, чтобы плоскость, натянутая на касательную плоскость к изотропному подмногообразию и характеристическое направление, взаимно однозначно проектировалась на  $x$ -пространство.

Имеется стандартный способ построения начальных изотропных многообразий. Рассмотрим в  $x$ -пространстве  $(n - 1)$ -поверхность  $\gamma^{n-1}$ . Пусть на ней задана начальная функция  $u_0$ . Подставим эти данные в уравнение и рассмотрим его как уравнение относительно  $p$ . Производные по касательным к  $\gamma^{n-1}$  направлениям нам уже заданы. Производную по трансверсальному направлению можно найти из уравнения по теореме о неявной функции, если  $F'_p$  в рассматриваемой точке не касается начальной гиперповерхности  $\gamma^{n-1}$ . Таким образом, получим  $(n - 1)$ -мерное изотропное начальное подмногообразие; данные такого типа называются данными Коши, подробности см. в [1, § 8, п. К, М].

**Теорема 3.** *Рассмотрим начальное  $(n - 1)$ -мерное подмногообразие  $V^{n-1} \subset V^{2n}$ , не касательное к характеристике; пусть  $n$ -мерная плоскость, натянутая на его касательную плоскость и характеристическое направление, изоморфно проектируется на  $x$ -пространство. Проведём через его точки характеристики. Тогда локально получим 1-график решения (см. рис. 2.3).*

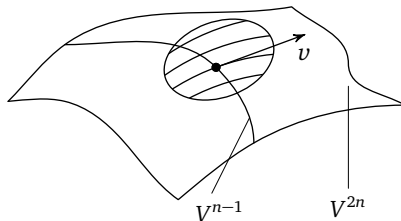


Рис. 2.3. Построение 1-графика решения

**Доказательство.** Подмногообразие  $V^{n-1}$  является изотропным:  $d\alpha|_{T_z V^{n-1}} = 0$ . Проведя через все его точки в окрестности регулярной точки  $z$  характеристики, получим  $n$ -мерное подмногообразие  $\Gamma^n$  в  $V^{2n}$ . Докажем, что  $d\alpha|_{\Gamma^n} = 0$ . Пусть  $v$  — векторное поле характеристических направлений. По формуле гомотопий  $L_v \alpha = i_v d\alpha + d(i_v \alpha)$ , где  $i_v d\alpha(\xi) := d\alpha(v, \xi)$ , а  $i_v \alpha = \alpha(v)$ . Очевидно,  $i_v \alpha = 0$ , а  $i_v d\alpha(\xi) = d\alpha(v, \xi) = 0$  для всякого вектора  $\xi \in (T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}$  и для любого  $z \in V^{2n}$ , по определению характеристического направления<sup>1</sup>.

**Лемма 1.** *Для того чтобы поле нулей формы  $\alpha$  было инвариантно относительно фазового потока поля  $v$ , лежащего в поле нулей формы, необходимо и достаточно, чтобы  $d\alpha(v, \xi) = 0$  для всех  $\xi$  из плоскости поля,  $\alpha(\xi) = 0$ .*

**Доказательство.** Нам нужна только достаточность, которую мы и докажем. Утверждение леммы локально и инвариантно относительно диффеоморфизмов, поэтому его достаточно доказать для стандартного поля  $v = \partial/\partial x_1$  в евклидовом пространстве с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  (по теореме о выпрямлении векторного поля). Пусть

$$\alpha = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n.$$

Тогда по условию  $a_1 \equiv 0$  (так как  $\alpha(v) \equiv 0$ ).

Чтобы говорить о поле нулей формы  $\alpha$  как о поле гиперплоскостей, будем считать, что  $\alpha$  не обращается в 0, в частности,  $a_2 \neq 0$ . Вектор  $\xi = (0, a_j(x), 0, \dots, 0, -a_2(x), 0, \dots)$  (ненулевые компоненты стоят на втором и  $j$ -м месте) лежит в ядре формы  $\alpha(x)$ . По условию

$$0 = L_v \alpha(\xi) = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} a_j - \frac{\partial a_j}{\partial x_1} a_2, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{a_j}{a_2} = 0, \quad \frac{a_j}{a_2} = \text{const}.$$

Поэтому вдоль орбиты поля  $v$  форма  $\alpha$  остаётся пропорциональной своему начальному значению. Следовательно, поле ядер формы  $\alpha$  инвариантно относительно поля  $v$ .  $\square$

В начальной точке пространство  $T_z \Gamma^n$  изотропно ( $V^{n-1}$  изотропно, а  $v$  — характеристический вектор). Фазовым потоком поля  $v$  это свойство переносится в любую точку  $z'$  многообразия  $\Gamma^n$ : пространство  $T_{z'} \Gamma^n$  изотропно. Итак,  $\alpha|_{\Gamma^n} = 0$ . Значит,  $\Gamma^n$  — интегральное подмногообразие контактной структуры. Таким образом,  $\Gamma^n$  — лежандрово подмногообразие. И по построению  $\Gamma^n$  — подмногообразие урав-

<sup>1</sup> В этом месте в оригинальном тексте была неточность, исправленная Ю. С. Ильяшенко. — Прим. ред.

нения. Остаётся доказать, что локально это 1-график. Это вытекает из следующей общей теоремы.

**Теорема 4.** Пусть  $n$ -мерная поверхность  $\Gamma^n$  в пространстве 1-струй является лежандровой (интегральной для контактной структуры), и пусть она локально взаимно однозначно проектируется на  $x$ -пространство. Тогда локально это 1-график (см. рис. 2.4).

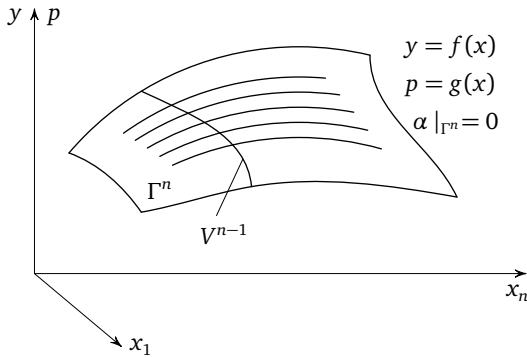


Рис. 2.4. Интегральная поверхность как 1-график

**Доказательство.** Запишем условие лежандровости  $\alpha|_{\Gamma^n} = 0$  (поверхность является интегральной для контактной структуры):

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \sum_{i=1}^n g_i dx_i = 0 \right) \Rightarrow \left( g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

поскольку  $x_i$  — локальные координаты на  $\Gamma^n$ . Но это и означает, что  $\Gamma^n$  — 1-график. Теорема 4 доказана. □

Тем самым теорема 3 доказана. □

**Пример.** Решим задачу Коши для уравнения Эйлера  $u_t + uu_x = 0$ . Обычно в качестве начальной кривой на плоскости  $(x, t)$  выбирают прямую  $t = 0$ . Зададим начальную функцию  $y = u_0(x)$  (см. рис. 2.5).

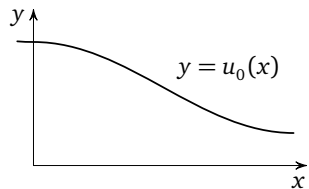


Рис. 2.5. Начальное условие для уравнения Эйлера

Уравнения характеристик:  $t' = 1, y' = 0, x' = u$ ; условия трансверсальности выполнены. Заметим, что для квазилинейного

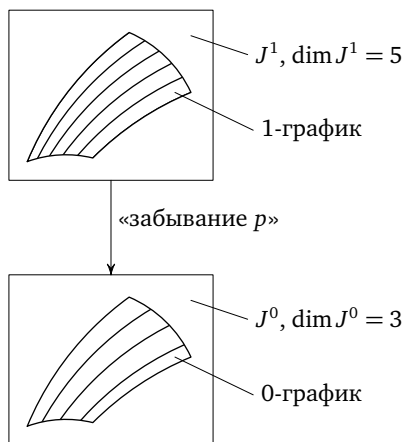


Рис. 2.6. Характеристики квазилинейного уравнения в  $J^0$  суть проекции характеристик из  $J^1$

уравнения всё можно рассматривать в пространстве  $J^0$ , поскольку характеристики квазилинейного уравнения в  $J^0$  являются проекциями «настоящих» характеристик из  $J^1$  (см. рис. 2.6).

Итак, будем рассматривать 0-график в  $J^0$ . Нарисуем на плоскости  $(x, y)$  серию сечений графиков при  $t = \text{const}$  (см. рис. 2.7). Значения решения в последующие моменты получаются переносом начальных значений вдоль характеристик.

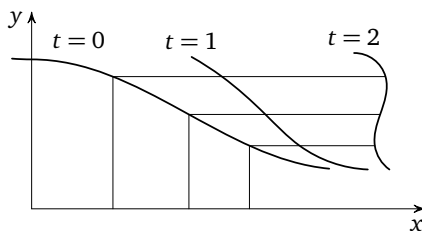


Рис. 2.7. Графики решения уравнения Эйлера в последовательные моменты времени

Мы видим, что начиная с некоторого момента кривая перестаёт быть графиком. Интегральная поверхность уравнения перестаёт взаимно однозначно проектироваться на плоскость  $(x, t)$ . Кривая критических значений проектирования имеет точку возврата (см. рис. 2.8).

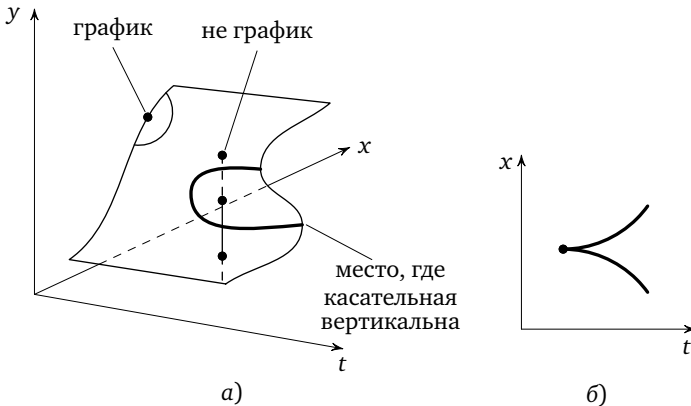


Рис. 2.8. а) Интегральная поверхность перестаёт быть графиком.  
 б) Кривая критических значений проектирования

Физически уравнение Эйлера описывает эволюцию поля скоростей не взаимодействующих частиц. Эта модель хороша, например, для описания звёздных потоков, нарушение единственности решения можно трактовать как свободное прохождение разных потоков сквозь друга.

С другой стороны, при больших плотностях частицы начинают сталкиваться, и через некоторое время уравнение Эйлера перестаёт выполняться. Его заменяют на другое уравнение, учитывающее взаимодействие, например на уравнение Бюргера  $u_t + uu_x = \epsilon u_{xx}$ . При малых  $\epsilon$  его решения приближают решения уравнения Эйлера до критического времени, а при больших значениях времени имеют тип ударных волн: график функции  $u$  почти вертикален в малой (порядка  $\epsilon$ ) окрестности движущейся точки (см. рис. 2.9).

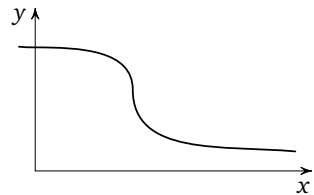


Рис. 2.9. Решения типа ударной волны

Справа и слева от этой точки решения также близки к решениям уравнения Эйлера. Замечательно, что уравнение Бюргера явно решается — оно сводится к уравнению теплопроводности, которое мы рассмотрим позже.

**Замечание.** 1-график решения уравнения первого порядка состоит из характеристик гиперповерхности, задающей уравнение в пространстве 1-струй (см. рис. 2.10).

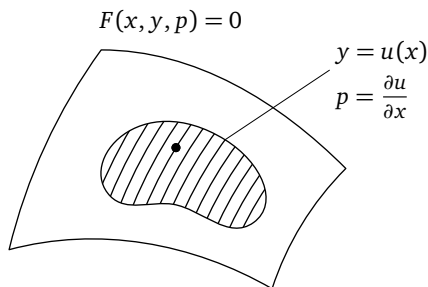


Рис. 2.10. 1-график решения в пространстве 1-струй

Таким образом, мы свели уравнение поля к уравнениям движения частиц. Но, как заметил Якоби, можно применить теорему в обратном направлении: свести уравнения движения частиц к уравнению поля. Это бывает полезно, поскольку системы уравнений движения частиц, как правило, явно не решаются.

Если мы найдём хотя бы одно решение уравнения поля (УРЧП), мы будем знать лежандрово подмногообразие, составленное из характеристик. Если найдём ещё одно решение уравнения поля, то наложим ещё одно условие на характеристики, и размерность интегрального многообразия-пересечения понизится на 1. Если удастся найти достаточно много решений, будем понижать размерность интегрального многообразия. Если известно достаточно большое (но конечнопараметрическое) семейство решений УРЧП, то все характеристики можно получить, пересекая соответствующие лежандровы многообразия, до тех пор пока не выделим саму (одномерную) характеристику.

Это метод Якоби интегрирования обыкновенных уравнений путём их представления как уравнений характеристик некоторого УРЧП.

Якоби применил его к решению гамильтоновых систем — систем уравнений характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби (функция  $F$  не зависит явно от  $y$ ). Результатом явилась, например, знаменитая теорема Лиувилля об интегрировании гамильтоновых систем, для которых известна полная система интегралов в инволюции.

Замечательно, что этот метод удалось «поднять» для интегрирования уже уравнений с частными производными! Для этого их надо рассматривать как бесконечномерные гамильтоновы системы. Таким образом удалось проинтегрировать известные уравнения Sine Gordon, Кортевега — де Фриза и др., см. [2, добавление 16].

Но из нашего замечания следует, что метод Якоби можно применять к более широкому классу систем, чем гамильтоновы, а именно к тем, которые суть уравнения характеристик некоторого УРЧП. Правда, про конкретное векторное поле трудно бывает узнать, является ли оно характеристическим для какого-либо уравнения. Соответствующая теория, по-видимому, до сих пор не развита, во всяком случае я не знаю её приложений к физически интересным задачам.

ЛИТЕРАТУРА к лекции 2: [1], [2].



## Лекция 3

# Принцип Гюйгенса в теории распространения волн

Рассмотрим пространство-время

$$M^{n+1} = B^n \times \mathbb{R},$$

где  $B^n$  — «физическое пространство», а  $\mathbb{R}$  — «ось времени». (Большая часть дальнейшей теории буквально переносится на случай расслоения  $M^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  над осью времени, а многое — также на случай, когда роль времени играет слоение на «изохроны» или даже нули незамкнутой дифференциальной формы  $dt$  на  $M$ .)

В геометрической оптике (а также в вариационном исчислении и в теории оптимального управления) в каждой точке многообразия  $M$  задан конус возможных скоростей движения.

**Пример.** Пусть  $B$  — риманово многообразии. Графики всевозможных «движений»  $q: \mathbb{R} \rightarrow B$  со скоростью единица в каждой точке касаются квадратичного конуса (который и задаёт риманову метрику)  $\|dq\| = |dt|$ . Таким образом,  $M$  снабжено полем лоренцевских квадратичных конусов.

Касательные плоскости конуса возможных направлений в точке  $t$ , являющейся его вершиной, принадлежат проективизации кокасательного пространства к  $M$  в этой точке,  $PT_m^*M \approx \mathbb{RP}^n$ . Часто полезно снабжать эти касательные плоскости коориентациями (указывающими направление распространения возмущения). Ориентированные касательные плоскости конуса возможных скоростей принадлежат сферизации  $ST_m^*M$  кокасательного пространства пространства-времени  $M$ . Эта сферизация диффеоморфна сфере  $S^n$ .

Некоориентированные (соответственно коориентированные) гиперплоскости в касательном пространстве многообразия называются *контактными элементами* (соответственно *коориентированными контактными элементами*) многообразия. Они образуют многооб-

разие расслоения контактных элементов (соответственно коориентированных контактных элементов)  $PT^*M \rightarrow M$  ( $ST^*M \rightarrow M$ ) со слоем  $\mathbb{R}P^n$  ( $S^n$ ), где  $n = \dim M - 1$ .

Таким образом, поле конусов возможных скоростей определяет гиперповерхность в многообразии контактных элементов пространства-времени (быть может, коориентированных). Эта гиперповерхность в геометрической оптике называется гиперповерхностью Френеля. Она является основным геометрическим объектом геометрической оптики, вариационного исчисления и теории оптимального управления.

**Замечание.** Векторы пространства, двойственного к пространству скоростей, в теории распространения волн часто называют медлительностями.

Построенная выше гиперповерхность может быть описана как поле конусов в пространстве  $T^*M$  медлительностей на пространстве-времени.

На многообразиях контактных элементов любого многообразия (коориентированных или нет) имеется замечательная геометрическая структура — контактная структура. Это поле гиперплоскостей в касательных пространствах многообразия контактных элементов, инвариантно определённое расслоением многообразия контактных элементов над исходным многообразием  $M$ .

Такое поле существует и единственно; оно называется *тавтологическим* и определяется следующей конструкцией. Каждая точка пространства расслоения контактных элементов на  $M$  является гиперплоскостью в касательном пространстве исходного многообразия  $M$ . Пробраз этой плоскости при проектировании пространства расслоения на  $M$  и есть гиперплоскость тавтологического поля в исходной точке.

**Замечание.** Тавтологическая контактная структура задаёт одно условие на скорость движения контактного элемента. Это условие называется *условием конька*. Смысл этого условия состоит в том, что конёк (контактный элемент на плоскости катка) может свободно вращаться на месте и может двигаться в заданном им самим направлении, но сопротивляется при попытке сдвигать его в трансверсальных направлениях.

Рассмотрим интегральные многообразия тавтологической контактной структуры.

**Пример 1.** Для любой гиперповерхности в  $M$  все касающиеся её контактные элементы образуют интегральное многообразие тавтологической контактной структуры в  $PT^*M$  (или в  $ST^*M$ , если они коориентированы). Размерность этого интегрального многообразия чуть-чуть (на  $1/2$ ) меньше половины размерности многообразия контактных элементов.

**Пример 2.** Все контактные элементы, приложенные в одной точке многообразия  $M$ , образуют интегральное многообразие тавтологической контактной структуры в  $PT^*M$  (или в  $ST^*M$ ). Размерность этого интегрального многообразия такая же, как размерность интегрального многообразия примера 1.

**Пример 3.** Для любого подмногообразия (любой размерности) в  $M$  все касающиеся его контактные элементы на  $M$  образуют интегральное подмногообразие тавтологической контактной структуры в  $PT^*M$  (или в  $ST^*M$ ) такой же размерности, как в примерах 1 и 2.

**Задача 1.** Докажите, что интегральных подмногообразий большей  $n$  размерности многообразии контактных элементов на  $M^{n+1}$  с тавтологической структурой не имеет.

**Задача 2.** Существуют ли гладкие интегральные подмногообразия размерности  $n$  тавтологической контактной структуры на многообразии контактных элементов в  $M^{n+1}$ , не получающиеся конструкцией из примера 3?

**У к а з а н и е.** Рассмотрите контактные элементы, касающиеся полукубической параболы  $x^2 = y^3$  на плоскости ( $n = 1$ ).

**Определение.** Интегральные многообразия наибольшей возможной размерности ( $n$  в контактной многообразии размерности  $2n + 1$ ) называются *лежандровыми*.

**Теорема 1** (теория опорных функций). *Многообразие 1-струй функций на сфере  $S^{n-1}$  в  $\mathbb{R}^n$  (с его естественной контактной структурой) контактно диффеоморфно многообразию коориентированных контактных элементов в  $\mathbb{R}^n$  (с его тавтологической контактной структурой).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим через  $q \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  точку единичной сферы в евклидовом пространстве. Касательные векторы к сфере в точке  $q$  можно считать ортогональными  $q$  векторами пространства. Их можно также считать кокасательными, так как евклидова

структура отождествляет вектор  $p$  с линейной функцией  $(p, \cdot)$ . Таким образом, 1-струя функции  $f$  на  $S^{n-1}$  задаётся тройкой  $(q \in S^{n-1}, p = df|_q \in \mathbb{R}^n, z = f(q))$ .

Искомый диффеоморфизм задаётся формулой

$$Q = q + pz, \quad P = q,$$

где  $Q$  — точка приложения контактного элемента  $\mathbb{R}^n$ , коориентированного нормальным ему вектором  $P$ .  $\square$

**Задача.** Докажите, что:

1) это действительно диффеоморфизм

$$J^1(S^{n-1}, \mathbb{R}) \approx ST^*\mathbb{R}^n \quad (\approx S^{n-1} \times \mathbb{R}^n);$$

2) он переводит естественную контактную структуру в  $J^1$  в тавтологическую контактную структуру  $ST^*$ .

**У к а з а н и е.** Посмотрите, во что переходят лежандровы многообразия.

**Замечание.** Расстояние от начала координат до ортогональной  $q$  касательной плоскости выпуклой гиперповерхности в  $\mathbb{R}^n$  называется *значением опорной функции* заданной гиперповерхности в точке  $q \in S^{n-1}$ . Опорная функция задана на сфере (внешних) нормалей и определяет гиперповерхность.

Функция, заданная на сфере, определяет гиперповерхность в пространстве (огibaющую соответствующего функции семейства гиперповерхностей). Эта гиперповерхность, однако, может иметь особенности.

**Задача.** Рассмотрите кривые, заданные функциями  $x^2 + y^2 + t$  (где  $t$  — параметр) на окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

Вернёмся к гиперповерхности Френеля медлительности фронтов, лежащей в многообразии  $ST^*M^{n+1}$  коориентированных контактных элементов пространства-времени.

**Определение.** Лучами (на этой гиперповерхности) называются её характеристики (т. е. интегральные кривые поля характеристических направлений гиперповерхности).

Напомню, что характеристическое направление гиперповерхности в точке многообразия с контактной структурой (заданной как поле нулей дифференциальной 1-формы  $\alpha$ ) есть косоортогональное дополнение (в смысле симплектической структуры  $d\alpha$  на плоскости

$\alpha = 0$  в каждой точке) к пересечению касательной гиперплоскости гиперповерхности с гиперплоскостью контактной структуры.

**Пример.** Пусть  $(q_1, \dots, q_n)$  — координаты точки в «физическом пространстве»  $B^n$ ,  $q_0 = t$  — время,  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$  — соответствующие компоненты момента. Тавтологическая контактная структура локально задаётся 1-формой

$$\alpha = p_0 dq_0 + p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

где  $[p_0 : p_1 : \dots : p_n]$  — однородные координаты в  $\mathbb{R}^n P^n$ ,  $q_0 = t$ . В аффинных координатах, для которых  $p_0 = -1$ , имеем

$$\alpha = -dt + p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n.$$

Гиперповерхность медлительностей задаётся уравнением

$$p_0 = H(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n, t),$$

где  $H$  — однородная функция первой степени по переменным  $p_i$ . Уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Таким образом, лучи определяются уравнениями Гамильтона, причём функция Гамильтона задаётся гиперповерхностью медлительностей.

Рассмотрим теперь геометрию распространения волн в среде, в которой локальная скорость распространения возмущений определяется этой гиперповерхностью медлительностей в пространстве контактных элементов пространства-времени.

Типичным примером является семейство эквидистант подмногообразия риманова многообразия. Гиперповерхность медлительностей определяет гиперповерхность второго порядка в каждом проективизированном кокасательном пространстве пространства-времени. Семейство эквидистант (гиперповерхностей, отстоящих на расстояние  $t$  от заданной начальной гиперповерхности в физическом пространстве) можно рассматривать как одну гиперповерхность в пространстве-времени (её сечения различными изохронами  $t = \text{const}$  и дают всё семейство эквидистант). Аналогичным образом определяется большой фронт, описывающий распространение фронтов возмущений единой гиперповерхностью в пространстве-времени с более

общей гиперповерхностью медлительностей в многообразии контактных элементов пространства-времени.

Рассмотрим контактные элементы пространства-времени, касающиеся большого фронта. Все они принадлежат гиперповерхности медлительностей (в этом и состоит локальный закон распространения возмущений). Очевидно следующее предложение.

**Предложение.** *Контактные элементы, касающиеся большого фронта, образуют лежандрово подмногообразие тавтологической контактной структуры пространства контактных элементов пространства-времени, проектирующееся на большой фронт и лежащее в гиперповерхности медлительностей.*

Рассмотрим теперь начальное условие, задаваемое мгновенным фронтом возмущения в момент  $t = 0$ . Этот фронт определяет подмногообразие коразмерности один в большом фронте, которое также является интегральным для тавтологической контактной структуры многообразия контактных элементов пространства-времени, но которое не лежандрово, так как имеет размерность, на 1 меньшую, чем лежандровы подмногообразия.

Это начальное интегральное подмногообразие состоит из контактных элементов пространства-времени, касающихся начального фронта и вдобавок принадлежащих гиперповерхности медлительностей. Именно последнее условие позволяет (при надлежащих условиях невырожденности) выбрать из однопараметрического семейства контактных элементов пространства-времени, содержащих касательное пространство к начальному фронту в данной точке, тот контактный элемент пространства-времени, который касается конуса возможных скоростей.

Основу всей теории распространения возмущений составляет следующий простой и общий факт контактной геометрии (в сущности, открытый Гюйгенсом и заслуживающий поэтому наименования «принцип Гюйгенса»).

**Теорема 2.** *Лежандрово подмногообразие гиперповерхности в контактном пространстве содержит вместе с каждой точкой всю характеристику этой поверхности, проведённую через эту точку.*

Здесь предполагается, что касательная плоскость к гиперповерхности нигде не совпадает с контактной плоскостью  $\alpha = 0$ .

**Доказательство.** Вдоль лежандрова многообразия  $\alpha = 0$ , поэтому на его касательной плоскости  $d\alpha = 0$ . Если бы вектор  $\xi$  харак-

теристического направления не лежал в этой плоскости, он был бы ей косоортогонален в смысле формы  $da$  и мы получили бы, присоединив  $\xi$  к касательной плоскости лежандрова многообразия, косоортогональную себе плоскость в симплектическом линейном пространстве  $\alpha = 0$ , размерность которой больше половины размерности пространства. Это невозможно, поэтому характеристические направления касаются лежандрова многообразия, что и утверждалось.  $\square$

**Следствие.** *Лежандрово многообразие, соответствующее большому фронту, получается из начального условия следующей конструкцией. Начальный фронт поднимается в интегральное многообразие пространства контактных элементов пространства-времени, лежащее в гиперповерхности медлительностей. Затем рассматриваются характеристики этой гиперповерхности, проходящие через точки построенного интегрального многообразия. Они образуют лежандрово многообразие. Его проекция в пространство-время — это большой фронт.*

*Сечения большого фронта изохронами  $t = \text{const}$  — это мгновенные фронты.*

В этом состоит описание распространения возмущений при походе волн (фронтов) и лучей (характеристик).

Поскольку характеристики определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями, каждая из них определяется одной своей точкой. При совершенно разных начальных условиях, для которых совпадают лишь касательные гиперплоскости начальных фронтов в одной точке в начальный момент времени, характеристики будут одинаковыми. Физически это означает, что бесконечно малые кусочки волнового фронта распространяются (вдоль характеристик) независимо друг от друга. Это и позволяет привлечь для описания распространения фронта (волн, определяемых уравнениями с частными производными) частицы (движение которых определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями — уравнениями Гамильтона для характеристик гиперповерхности медлительностей).

В частности, в качестве начального условия можно даже взять точечный фронт (соответствующий лежандрову многообразию, составляющему слой расслоения контактных элементов). Теорема применима и в этом случае (хотя он и кажется вырожденным с точки зрения приведённого выше следствия).

Точечному начальному фронту соответствует «сферическая» волна. Сопоставляя распространение возмущений от произвольного началь-

ного фронта с распространением возмущений от одного из составляющих его точечных источников, мы видим, что соответствующие им лежандровы многообразия содержат общую характеристику. Из этого следует, что мгновенный фронт в последующие моменты времени касается сферического фронта исходного точечного источника в точке на луче, выходящем из источника по направлению, определяемому направлением начального фронта.

Отсюда следует, что мгновенный фронт в момент  $t$  является огибающей семейства сферических фронтов точечных источников, принадлежащих исходному фронту. Это первоначальная формулировка принципа Гюйгенса (известного в разных разделах математики под разными именами: принцип Понтрягина, канонические уравнения Гамильтона и т. д.).

Между прочим, уравнения характеристик — не что иное, как инфинитезимальный вариант утверждения Гюйгенса об огибающей, соответствующий бесконечно малым значениям  $t$  и, следовательно, бесконечно малым сферическим фронтам.

Разумеется, в описанной выше геометрической теории предполагалось, что нужные определители отличны от нуля, так что теорема о неявной функции применима. Например, поле лоренцевых конусов в пространстве-времени нигде не должно касаться изохрон  $t = \text{const}$  и т. д. Нетрудно проверить, что в таких примерах, как задачи римановой геометрии, даже с зависящей от времени метрикой, эти условия выполнены автоматически. В других задачах, например в теории оптимального управления, ситуация часто оказывается более сложной и необходимость исследовать особенности, возникающие при обращении определителей в нуль, составляет основную трудность.

Тот факт, что характеристики, проведённые через точки начального интегрального многообразия, образуют лежандрово многообразие, нуждается в доказательстве. Мы на нём не останавливаемся, потому что оно совершенно такое же, как уже проведённое выше доказательство теоремы 3 лекции 2.



## Лекция 4

### Струна (метод Даламбера)

Рассмотрим струну (можно представлять себе реальную струну музыкального инструмента, прикреплённую к деке; см. рис. 4.1).

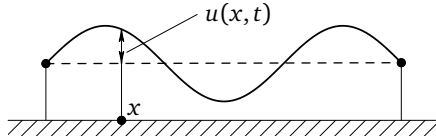


Рис. 4.1. Струна

Пусть  $u(x, t)$  — смещение струны в точке  $x$  в момент  $t$  от равновесного состояния в ортогональном направлении. Известно, что если струна однородна, а смещения невелики по сравнению с размерами струны, то функция  $u(x, t)$  удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (4.1)$$

Выводом этого уравнения мы в данной лекции заниматься не будем. Здесь  $a$  — константа, имеющая, как будет показано ниже, физический смысл скорости.

#### 1. Общее решение

**Задача 1.** Покажите, что уравнение (4.1) заменой переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

приводится к виду

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (4.2)$$

(При  $a = 1$  эта замена представляет собой композицию поворота и растяжения в плоскости независимых переменных.)

Уравнение (4.2) легко решается: запишем его в виде  $(u_\xi)_\eta = 0$ , что означает, что функция  $u_\xi$  не зависит от  $\eta$ , т. е. постоянна вдоль вертикальных прямых на плоскости  $(\xi, \eta)$  (см. рис. 4.2).

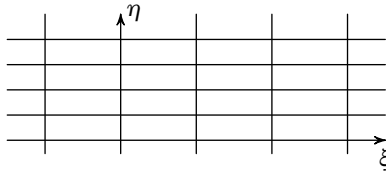


Рис. 4.2. Характеристики уравнения струны

Итак,  $u_\xi = f(\xi)$ , т. е. дифференциальное уравнение свелось к простейшему уравнению вида  $F' = f$ , значит,

$$u = \int f(\xi) d\xi = F(\xi) + G(\eta);$$

заметим, что константа интегрирования, вообще говоря, зависит от прямой, вдоль которой интегрирование происходит, т. е. от  $\eta$ .

Если мы ищем решение в классе таких функций, чтобы все они, в том числе в промежуточных выкладках, были непрерывными, то получим общее решение вида  $f(\xi) + g(\eta)$ , где функция  $f$  гладкая, а  $g$  непрерывная. Мы пришли к «решению», которое может вообще не иметь производных! Кроме того, решая в другом порядке, получим асимметрию в смысле гладкости. Симметричность же смешанных частных производных имеет место только в достаточно гладком случае. Это наблюдение служит стимулом к введению обобщённых функций, в классе которых можно рассматривать решение вида  $f(\xi) + g(\eta)$  с негладкими  $f, g$ .

В данной лекции мы считаем, что решение ищется в классе достаточно гладких функций, так что  $f$  и  $g$  достаточно гладкие.

Итак,

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

— общее решение уравнения (4.2).

## 2. Краевые задачи и задача Коши

Задача Коши выявляет сходство и различие теорий ОДУ и УРЧП. В теории ОДУ фазовое пространство конечномерно, а мы будем иметь дело с бесконечномерным фазовым пространством.

Задача Коши для струны представляет собой уравнение (4.1) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \quad (4.3)$$

Значение второй производной в начальный момент задавать не надо, поскольку её можно определить из уравнения.

Мы считаем, что  $x \in \mathbb{R}$ , т. е. струна бесконечна. Эта модель даёт хорошее приближение к физической реальности, если мы рассматриваем малые по сравнению с размером струны отклонения на малых промежутках времени.

Первая краевая задача включает уравнение (4.1) при  $x \in (0, l)$ , начальные условия (4.3) и граничные условия

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad (4.4)$$

выражающие тот факт, что конечная струна закреплена на концах.

Эта задача описывает также продольные колебания закреплённого на концах стержня, здесь  $u(x, t)$  — смещение точки  $x$  стержня от положения равновесия в момент  $t$  (см. рис. 4.3).

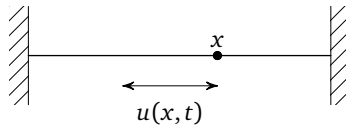


Рис. 4.3

Можно рассмотреть колебания стержня с одним или обоими свободными концами, что выражается условием

$$u_x|_{x=0} = 0 \quad \text{и/или} \quad u_x|_{x=l} = 0. \quad (4.5)$$

Комбинацией этих условий получаются вторая и третья краевые задачи.

Четвёртая краевая задача: рассматриваются периодические граничные условия

$$u(x, t) = u(x + l, t), \quad (4.6)$$

тем самым функция  $u$  задана на окружности.

Мы собираемся получить полные решения всех указанных задач (частично в упражнениях).

### 3. Задача Коши для неограниченной струны. Формула Даламбера

Итак, рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$$

**Теорема** (формула Даламбера). *Решение задачи Коши даётся формулой*

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy. \quad (4.7)$$

**Схема доказательства.** Нам известно, что общее решение уравнения имеет вид  $u(x, t) = f(x-at) + g(x+at)$ . Рассмотрим слагаемое  $f(x-at)$ . График функции  $f(x-at)$  в фиксированный момент  $t$  представляет собой график функции  $f(x)$ , сдвинутый при  $t > 0$  вправо на  $at$ . Это слагаемое называется *прямой волной*. Аналогично слагаемое  $g(x+at)$  называется *обратной волной*. Подставив  $t = 0$  сначала в формулу общего решения, а затем в эту же формулу, продифференцированную по  $t$ , получим систему:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) = f(x) + g(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) = -af'(x) + ag'(x). \end{cases} \quad (4.8)$$

Решив её, найдём  $f, g$ , подставим в формулу общего решения и получим формулу (4.7).  $\square$

**Задача 2.** Восстановите подробности доказательства.

#### Задачи о «мультфильмах»

Пользуясь формулой Даламбера, можно рисовать последовательные «кадры мультфильма о колебании струны», зная графики условия Коши.

**Пример.** Пусть  $\psi \equiv 0$ , а график функции  $\varphi$  имеет такой вид, как на рис. 4.4, где  $\varphi \neq 0$  на интервале длины 1.

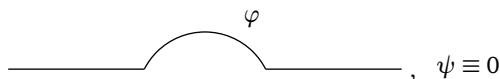


Рис. 4.4. Начальные условия

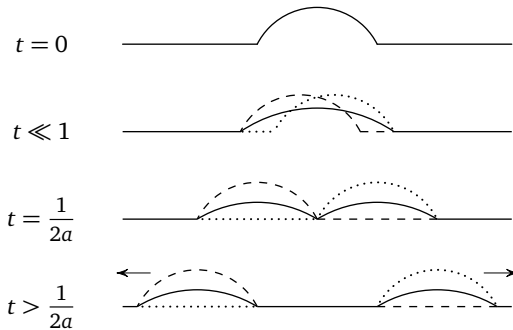



Рис. 4.5. Форма струны в последовательные моменты

Тогда по формуле Даламбера, которая в данном случае имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2},$$



мы получаем форму струны в последовательные моменты времени (см. рис. 4.5).

**Задача 3.** Нарисуйте мультфильм для начальных условий  $\varphi \equiv 0$ ,  $\psi$  — функция вида .

#### 4. Полуограниченная струна

Задача включает в себя уравнение (4.1), начальные условия (4.3) и граничные условия  $u|_{x=0} \equiv 0$  (закреплённый конец) или  $u_x|_{x=0} \equiv 0$  (свободный конец).

Комбинируя граничные условия и вид начальных данных, получаем таблицу задач:

начальные условия \ граничные условия	$\varphi$ :  $\psi \equiv 0$	$\varphi \equiv 0$ $\psi$ : 
свободный конец при $x = 0$	4	5
закреплённый конец при $x = 0$	6	7

**Задачи 4–7.** Нарисуйте мультфильмы движения струны для указанных в таблице условий.

**У к а з а н и е.** Полуограниченную задачу можно свести к неограниченной так, чтобы решение неограниченной задачи, суженное на

полупрямую, давало решение полуограниченной задачи. Для этого необходимо так продолжить начальные условия на всю прямую, чтобы решение в точке  $x = 0$  удовлетворяло граничным условиям.

Здесь помогают соображения чётности. Продолжить начальное условие на всю прямую чётным образом можно, если в начальный момент  $u_x|_{x=0} = 0$ . Но будет ли решение в любой момент чётным по  $x$ ? Во-первых, это можно вывести из формулы Даламбера, во-вторых, можно воспользоваться следующей замечательной идеей.

При выводе формулы Даламбера доказана единственность решения задачи Коши. Уравнение инвариантно относительно преобразования  $x \mapsto -x$ . Если начальное условие чётно, т. е. тоже инвариантно относительно этого преобразования, то имеем два решения:  $u(x, t)$  и  $u(-x, t)$ . Но поскольку решение единственно, они совпадают:  $u(x, t) = u(-x, t)$ , т. е. решение чётно.

Это общая идея: если задача выдерживает некоторую симметрию, а решение единственно, то оно тоже выдерживает эту симметрию.

Аналогично можно использовать нечётное продолжение для условия  $u|_{x=0} = 0$ .

## 5. Ограниченная струна (резонанс)

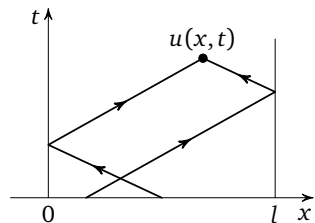
Метод Даламбера не очень удобен для решения краевых задач в случае ограниченной струны. Впоследствии мы разовьём другой, очень мощный метод. Сейчас проиллюстрируем применение метода Даламбера на задаче о вынужденных колебаниях ограниченной струны. Эта задача включает в себя уравнение (4.1), начальные условия (4.3) и следующие краевые условия:  $u|_{x=0} = f(t)$ ,  $u|_{x=l} = 0$ .

**Задача 8.** Найдите общее решение.

**У к а з а н и е.** Вклад в решение в точке  $(x, t)$  дают значения, принесённые с краёв и с начального отрезка  $t = 0$  вдоль характеристик

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

Характеристики претерпевают излом, отражаясь от краёв. В итоге значение решения представляет собой альтернированную сумму значений в узлах полученных



**Рис. 4.6.** Как получается значение решения в данной точке

ломанных (см. рис. 4.6). Начальные условия могут быть произвольными, для простоты можете сначала рассмотреть нулевые.

**Задача 9.** Пусть функция  $f(t)$  периодическая с периодом  $T$ . Будет ли существовать периодическое решение с такими граничными условиями? Если будет, то будут ли периодическими остальные решения?

**О т в е т.** Периодического решения не существует, например, в случаях резонанса (когда период внешней силы  $T$  соизмерим с «периодом собственных колебаний»  $2l/a$ ). При почти всех (в смысле меры Лебега) значениях  $T$  периодическое решение существует (по крайней мере, если функция гладкая). Это вытекает из теоретико-числовых соображений (метрической теории диофантовых приближений).

В заключение отметим, что все рассмотренные результаты требовали лишь элементарного математического анализа, не выходящего за рамки теории дифференцирования и интегрирования. Следующие разделы потребуют более мощных средств анализа.

## 6. Метод Фурье

Вернёмся к уравнению (4.1):  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ . На его правую часть мы можем смотреть как на дифференциальный оператор, отображающий одно функциональное пространство в другое (или в себя, если рассматривать пространство бесконечно гладких или аналитических функций).

Запишем уравнение (а вместе с ним и любую рассмотренную задачу) более абстрактно, например,

$$u_{tt} = Au, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \quad \text{или} \quad u(x + 2\pi, t) = u(x, t).$$

Начальные условия не фиксируем, поскольку хотим научиться решать задачу для произвольных начальных условий.

Итак,  $A$  — линейный оператор, а точкой фазового пространства является функция  $u$ , удовлетворяющая нашим граничным условиям.

Оператор  $A$  имеет некоторые дополнительные свойства, кроме линейности. Посмотрим, что могут дать эти свойства, для простоты сначала на конечномерных моделях.

**Модель 1.** Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение  $u_t = Au$ . Здесь  $u$  — вектор в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^N$ , а  $A$  — самосопряжённый оператор:  $(Ax, y) = (x, Ay)$ , где скобки обозна-

чают скалярное произведение. Тогда оператор  $A$  имеет ортогональный базис из собственных векторов  $X_k$ , причём соответствующие собственные значения  $\lambda_k$  вещественны. Фундаментальную систему решений образуют функции  $e^{\lambda_k t} X_k$ . Общее решение имеет вид

$$u(t) = \sum c_k e^{\lambda_k t} X_k.$$

Нетрудно найти решение с заданным начальным условием  $u(0) = \varphi$  (в данном случае это конечномерные векторы). Подставим  $t = 0$ :

$$\varphi = \sum c_k X_k,$$

нам надо найти  $c_k$ . Домножим скалярно на  $X_j$ , воспользуемся ортогональностью базиса и получим

$$c_j = \frac{(\varphi, X_j)}{(X_j, X_j)}.$$

Сходство с волновым уравнением здесь в том, что наш дифференциальный оператор второго порядка  $d^2/dx^2$  — самосопряжённый в подходящем пространстве.

### Дифференциальные операторы в пространстве тригонометрических многочленов

Одна из самых замечательных идей Гильберта заключается в том, чтобы рассматривать пространства функций как евклидовы. Эта идея лежит в основе функционального анализа.

Но сейчас мы ограничимся конечномерными пространствами тригонометрических многочленов. При любом натуральном  $N$  рассмотрим пространство

$$E_N = \left\{ u(x) = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k e^{ikx}, x \in S^1, c_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Если суммирование распространяется от  $-N$  до  $N$ , то мы остаёмся в пределах линейной алгебры, а если от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то попадаем в область рядов Фурье, это уже раздел функционального анализа.

На пространстве  $E_N$  введём эрмитову структуру:

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f \bar{g} dx.$$



**Задача 10.** Проверьте, что выполнены все аксиомы эрмитова пространства.

Норма многочлена определяется формулой  $\|f\|^2 = (f, f)$ .

**Задача 11.** Докажите, что многочлены  $e_k = e^{ikx}$ ,  $k \in \{-N, \dots, N\}$ , образуют ортогональный базис.

Решение. В самом деле,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = 2\pi,$$

если  $k = l$ ; если же  $k - l = m \neq 0$ , то интеграл равен

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = \frac{1}{im} e^{imx} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

**Модель 2.** Рассмотрим периодическую краевую задачу для волнового уравнения с начальными условиями из пространства  $E_N$ :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & u(x + 2\pi, t) &= u(x, t), \\ u|_{t=0} &= \varphi, & u_t|_{t=0} &= \psi, \quad \varphi, \psi \in E_N. \end{aligned}$$

В следующей лекции мы сведём её к системе ОДУ вида  $u_{tt} = Au$ , т. е. к аналогичной системе модели 1.

## Лекция 5

### Метод Фурье (для струны)

Рассмотрим периодическую краевую задачу для струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad (5.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \quad (5.2)$$

Эту задачу можно рассматривать как задачу Коши на окружности  $S^1$ . На связном компактном многообразии с краем (например, на отрезке) пришлось бы задавать те или иные краевые условия.

#### 1. Решение задачи в пространстве тригонометрических многочленов

Рассмотрим пространство комплексных тригонометрических многочленов

$$E_N = \left\{ \sum_{-N}^N a_k e^{ikx}, a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

(Можно рассматривать и вещественнозначные многочлены; необходимое и достаточное условие вещественности:  $a_k = \overline{a_{-k}}$ .)

Пусть начальные данные  $\varphi, \psi$  принадлежат  $E_N$ . Тогда и решение  $u(\cdot, t)$  принадлежит  $E_N$ . В  $E_N$  имеется эрмитова структура:

$$(f, g) = \int_{S^1} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

Легко проверяются следующие свойства.

1. Многочлены  $\{e^{ikx}\}$  образуют ортогональный базис. Этот базис не нормированный:  $\|e^{ikx}\| = \sqrt{2\pi}$ . Обозначим  $X_k = e^{ikx}$ .

2. Оператор

$$L = a^2 \frac{d^2}{dx^2} : E_N \rightarrow E_N$$

самосопряжённый, причём  $X_k$  — его собственные векторы:

$$LX_k = -a^2 k^2 X_k.$$

## 2. Отступление

Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  и в нём самосопряжённый невырожденный оператор  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Пусть  $\{X_k\}$  — ортогональный собственный базис,  $\lambda_k = -\omega_k^2$  — собственные значения.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\ddot{x} = Lx, \quad x(0) = \varphi, \quad \dot{x}(0) = \psi.$$

Вектор-функции  $\sin(\omega_k t)X_k$ ,  $\cos(\omega_k t)X_k$  образуют фундаментальную систему решений этой задачи. Действительно, размерность пространства решений задачи равна  $2n$  (это доказывается сведением к системе первого порядка:  $\dot{x} = p$ ,  $\dot{p} = Lx$ ), указанные  $2n$  функций являются решениями, и, кроме того, они линейно независимы (проверьте!).

Значит, общее решение имеет вид

$$x(t) = \sum (a_k \cos(\omega_k t)X_k + b_k \sin(\omega_k t)X_k).$$

Легко также найти решение с заданными начальными условиями:

$$x(0) = \sum a_k X_k \Rightarrow a_k = \frac{(\varphi, X_k)}{(X_k, X_k)},$$

$$\dot{x}(0) = \sum b_k \omega_k X_k \Rightarrow b_k = \frac{(\psi, X_k)}{\omega_k (X_k, X_k)}.$$

## 3. Формулы для решения задачи пункта 1

В этом случае вместо  $x$  пишем  $u$ , вместо  $\mathbb{R}^n$  имеем  $E_N$ , и оператор  $L$  имеет вид  $L = a^2 \partial^2 / \partial x^2$ , где мы для простоты считаем, что  $a = 1$ . Имеем  $X_k = e^{ikx}$ ,  $\omega_k = k$ .

Тогда общее решение задачи Коши имеет вид

$$u(x, t) = \sum (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) e^{ikx}, \quad (5.3)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} (\varphi, e^{ikx}), \quad (5.4)$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} (\psi, e^{ikx}), \quad k \neq 0. \quad (5.5)$$

Суммирование в этих формулах ведётся в пределах от  $-N$  до  $N$ .

Итак, процесс решения задачи Коши в классе  $E_N$  не выходит за рамки линейной алгебры. Но замечательно, что и в общем случае ответ даётся формулами (5.3)–(5.5) (с суммированием от  $-\infty$  до  $+\infty$ ).

#### 4. Общий случай

Пусть  $\varphi, \psi \in C^\infty(S^1)$  (можно также рассмотреть класс аналитических начальных данных или, наоборот, конечной гладкости).

**Теорема.** *Решение задачи Коши (5.1), (5.2) задаётся формулами (5.3)–(5.5) с суммированием от  $-\infty$  до  $+\infty$ .*

Для доказательства надо проверить сходимость ряда, возможность почленного дифференцирования и выполнение начальных условий.

#### 5. Ряды Фурье

Нам надо доказать сходимость ряда (5.3) вместе с частными производными до второго порядка включительно.

Рассмотрим пространство  $C^\infty(S^1)$  с эрмитовой структурой

$$(f, g) = \int_{S^1} f \bar{g} dx, \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

Это пространство не полно по этой норме, поэтому оно предгильбертово (полное пространство называется гильбертовым). В этом пространстве система функций  $\{X_k\} = \{e^{ikx}\}$  образует в некотором смысле «базис».

Заметим, что ряд (5.3) можно переписать в виде ряда по экспонентам, воспользовавшись формулами Эйлера. Появятся члены вида  $e^{ik(t+x)}, e^{ik(t-x)}$ . Такой ряд легко будет дифференцировать.

Для доказательства сходимости ряда (5.3) вместе со всеми рядами, полученными почленным дифференцированием, достаточно доказать, что коэффициенты  $a_k, b_k$  стремятся к 0 быстрее, чем любая степень  $k$ .

Чтобы доказать выполнение начальных условий, надо доказать, что ряд Фурье функции сходится к ней самой. В этом смысле система функций  $\{X_k\}$  и является базисом:

$$\varphi \sim \sum a_k X_k, \quad a_k = \frac{(\varphi, X_k)}{(X_k, X_k)},$$

тогда

$$\sum a_k X_k \rightarrow \varphi.$$

Заметим, что та часть доказательства, где доказывается просто сходимость ряда Фурье начального условия (безотносительно к предельной функции), не будет отличаться от доказательства сходимости

ряда (5.3). Для этого, как уже отмечено, достаточно установить быстрое убывание  $|a_k|$ .

## 6. Сходимость рядов Фурье

**Лемма 1.** Коэффициенты Фурье функции из класса  $C^\infty(S^1)$  убывают быстрее любой степени своего номера.

**Доказательство.** Очевидна следующая оценка:

$$|a_k| \leq \left( \max_{S^1} |\varphi| \right) \cdot 2\pi,$$

т. е. коэффициенты по меньшей мере ограничены. Выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi} \int \varphi(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{-2\pi ik} \int \varphi(x) d(e^{-ikx}) = \\ &= \frac{1}{-2\pi ik} \left( \varphi(x) e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi} - \int \varphi'(x) e^{-ikx} dx \right) = \frac{1}{2\pi ik} \int \varphi'(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

По той же самой причине, что в начале, последний интеграл ограничен равномерно по  $k$ . Далее можно снова выполнять интегрирование по частям, причём столько раз, сколько нам нужно.

В итоге получим, что  $\forall m \exists C_{m,\varphi} : |(\varphi, e^{ikx})| < C_{m,\varphi} |k|^{-m}$ . Лемма доказана.  $\square$

**Замечание.** Для функции класса  $C^m$  получим убывание коэффициентов Фурье, как  $1/|k|^m$ .

**Задача.** Пусть функция  $\varphi$  принадлежит классу  $C^\omega(S^1)$ , т. е. она голоморфна в полосе  $|\operatorname{Im} z| \leq \beta$  и периодична:  $\varphi(z + 2\pi) \equiv \varphi(z)$ . Докажите, что тогда коэффициенты Фурье убывают экспоненциально:

$$|a_k| < C e^{-\beta|k|}.$$

**Указание.** Сдвиньте путь интегрирования в интеграле, делящем коэффициенты Фурье, на  $\pm i\beta$  (в зависимости от знака  $k$ ).

Верно ли обратное утверждение: если для коэффициентов Фурье верна последняя оценка, то функция допускает голоморфное периодическое продолжение в указанную полосу?

**О т в е т.** Сумма ряда голоморфна *внутри* указанной полосы.

**Замечание.** Если функция непрерывна, то ряд Фурье сходится к ней в метрике  $L^2$ . Как показал современный шведский математик Карлесон, на множестве полной меры имеет место поточечная сходимость.

**Лемма 2.** Ряд Фурье функции класса  $C^2$  сходится к ней самой.

Доказательство. Ряд Фурье, построенный по функции  $\varphi$  класса  $C^2$ , равномерно сходится к некоторой функции  $\psi \in C^0$  (по замечанию после леммы 1). Надо доказать, что  $\varphi \equiv \psi$ . Допустим противное:  $\delta(x) := \varphi(x) - \psi(x) \not\equiv 0$ . Тем не менее,  $\delta$  имеет нулевой ряд Фурье:  $\forall k (\delta, X_k) = 0$ .

Попробуем приблизить  $\delta$  тригонометрическим полиномом:

$$\left\| \delta - \sum c_k X_k \right\|^2 = \|\delta\|^2 + \left\| \sum c_k X_k \right\|^2 \geq \|\delta\|^2 > 0. \quad (1)$$

Мы видим, что как угодно точное приближение невозможно. Однако по теореме Вейерштрасса можно приблизить непрерывную функцию  $\delta$  с любой точностью тригонометрическими полиномами равномерно. Это противоречит неравенству (1). Лемма доказана.  $\square$

**Замечание.** Можно рассмотреть метод Фурье для задачи на отрезке с теми или иными граничными условиями. Но фактически разработан метод решения совершенно общей задачи  $u_{tt} = Au$ , где  $u$  — функция на произвольном многообразии. Надо для оператора  $A$  на многообразии найти собственные функции, собственные значения и ортогональный базис из собственных функций, а затем осуществить всю вышеуказанную схему.

Уже для оператора Лапласа  $A = \Delta$  получается богатая теория, например, на многообразиях с римановой метрикой. Она составляет часть спектральной теории дифференциальных операторов.

## 7. Явление Гиббса

Ряд Фурье разрывной периодической функции не может сходиться к ней равномерно, но может сходиться поточечно (например, это так для кусочно гладких функций: сумма такого ряда совпадает с функцией на интервалах гладкости). Последовательность графиков частичных сумм ряда Фурье кусочно гладкой функции сходится (равномерно!), но не к графику исходной функции, а к другой кривой. Эта кривая получается из графика данной разрывной функции добавлением вертикальных отрезков над точками разрыва. Интересно, что эти отрезки длиннее, чем отрезки, соединяющие части графиков слева и справа от точки разрыва. При этом длины дополнительных вер-

тикальных хвостиков, выступающих вверх и вниз за график исходной функции, составляют всегда одинаковую долю (примерно 9% каждый) от величины разрыва (см. рис. 5.1).

Для доказательства этого удивительного факта (называемого *явлением Гиббса*) достаточно явно провести вычисления максимума и минимума частичной суммы ряда Фурье простейшей  $2\pi$ -периодической разрывной функции (скажем, равной  $x$  при  $|x| < \pi$ ). Общий случай можно свести к этому, уничтожая разрывы вычитанием подходящей линейной комбинации сдвигов этой простейшей разрывной функции.

Явление Гиббса приводит к интересным артефактам в томографии (где в качестве функций двух переменных выступает, например, рентгеновская оптическая плотность плоского сечения человеческого тела, восстанавливаемая компьютером при помощи суммирования (двойного) ряда Фурье)<sup>1</sup>.

Поскольку плотность — разрывная функция (например, из-за сканирования костей), возникает явление Гиббса. Оно проявляется здесь в виде дополнительных к линиям разрыва прямых: двойных касательных и касательных перегиба реальных границ тканей различной плотности (подумайте почему).

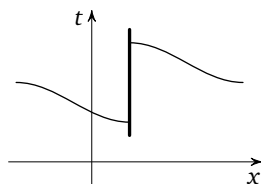


Рис. 5.1. Явление Гиббса

<sup>1</sup> Коэффициенты этого ряда являются коэффициентами Фурье так называемого преобразования Радона исходной плотности; преобразование Радона — это интеграл исходной плотности вдоль прямой, рассматриваемый как функция прямой; здесь оно рассматривается как функция одной переменной, а именно расстояния от прямой данного параллельного пучка прямых до одной из этих прямых.

## Лекция 6

# Теория колебаний. Вариационный принцип

Физикам известен экспериментальный факт: законы природы описываются вариационными принципами. Он не имеет рационального обоснования, что рождает попытки богословского, философского и пр. истолкований, см., например, сочинения Ф. Вольтера, П. Мопертюи и др. в сборнике [6].

Принцип гласит, что «природа совершает свои действия кратчайшим путём». Например, согласно принципу Ферма лучи света распространяются кратчайшим путём. В математической формулировке, близкой к современной, принцип наименьшего действия сформулирован Гамильтоном. Он имеет вид

$$\delta \int L dt = 0.$$

Входящий в эту формулу интеграл называется действием. Принцип описывает движение некоторой механической системы. Лагранжиан  $L(q, \dot{q}, t)$  — функция от состояния и скорости движения в соответствующем конфигурационном пространстве. В этой формулировке принцип читается так: «Движение механической системы  $q = q(t)$  возможно тогда и только тогда, когда вариация интеграла действия вдоль кривой  $q = q(t)$  равна нулю».

Другими словами, истинное движение является критической точкой функции действия, заданной на бесконечномерном пространстве гладких отображений отрезка в конфигурационное пространство (см. рис. 6.1). Функции на бесконечномерных пространствах обычно называют функционалами. Какой вид имеет функция действия для типичной механической системы?

Рассмотрим движение точки  $q$  по риманову многообразию  $M^n$ . Траектория задана отображением  $q = q(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . Будем считать, что концы  $q(t_0)$ ,  $q(t_1)$  фиксированы. Касательный вектор  $\dot{q}(t)$  имеет



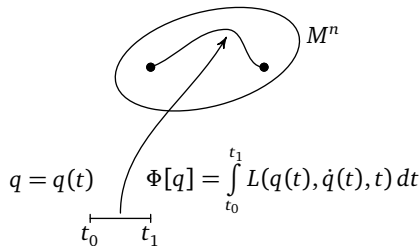


Рис. 6.1. Истинные движения — критические точки функции действия

риманов квадрат длины. Величина  $T = \frac{1}{2} \dot{q}^2$  называется *кинетической энергией*. Рассмотрим также некоторую функцию  $U: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , называемую *потенциальной энергией*. Положим  $L = T - U$ , эта функция называется *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*.

(В XIX веке шли споры по поводу обозначений для координат, импульсов, а также о выборе знака в лагранжиане; математикам «минус», разумеется, не нравился. По обыкновению победили физики, и теперь общепринятые обозначения такие:  $q$  — координаты,  $p$  — импульсы,  $L = T - U$  — лагранжиан,  $F = \partial L / \partial q$  — сила. Во всяком случае, физический здравый смысл удовлетворён: при поднимании камня от поверхности Земли его энергия увеличивается. См. [8].)

Функционал действия имеет вид

$$\Phi[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

В координатах кинетическая энергия  $T$  представляет собой квадратичную форму:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Введём импульсы  $p_i = \partial T / \partial \dot{q}_i$ .

Геометрически импульс есть линейная форма от касательного тора, т. е. кокасательный вектор.

**Теорема 1.** *Экстремали (критические точки) функционала действия удовлетворяют системе уравнений Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

(Это система  $n$  ОДУ второго порядка относительно  $n$  неизвестных функций  $q_i(t)$ .)

Теорему докажем позже, а сейчас выявим связь с уравнением колебаний струны и рассмотрим некоторые примеры.

Лагранж рассмотрел «дискретную струну», состоящую из шариков, скреплённых между собой пружинками (см. рис. 6.2).

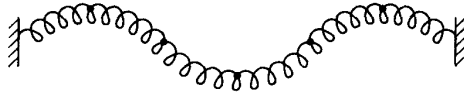


Рис. 6.2. Модель струны Лагранжа

Для такой системы нетрудно найти лагранжиан и вывести уравнения движения, затем предельным переходом можно получить уравнение струны и понять его вариационную основу, найти лагранжиан. Сначала рассмотрим простые примеры.

**Пример 1.** Пусть частица свободно движется в евклидовом пространстве, например, для простоты, на плоскости. Тогда потенциальная энергия  $U$  равна 0, лагранжиан

$$L = T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2).$$

Легко проверить, что экстремали действия — прямые. Действительно, по теореме 1 экстремали удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа, которые в данном случае имеют вид  $\dot{p}_1 = 0$ ,  $\dot{p}_2 = 0$ . Но  $p_1 = \dot{q}_1$ ,  $p_2 = \dot{q}_2$ , т. е. обобщённые импульсы совпадают со скоростями. Тогда  $\ddot{q}_1 = 0$ ,  $\ddot{q}_2 = 0$ , решения этих уравнений — прямые (см. рис. 6.3).

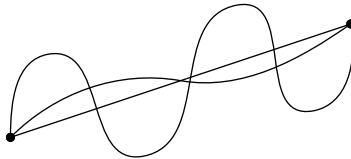


Рис. 6.3. Прямые — экстремали действия для свободной частицы

**Пример 2.** Теперь введём потенциальную энергию  $U = U(q)$ , т. е. пусть частица движется в силовом поле. Имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial q_1}, & \ddot{q}_1 &= -\frac{\partial U}{\partial q_1}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial q_2}, & \ddot{q}_2 &= -\frac{\partial U}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad \text{или}$$

Рассмотрим случай, когда  $U$  — квадратичная форма. Например, при  $n = 1$  имеем  $U = aq^2$ , уравнение  $\ddot{q} = -aq$  есть уравнение маятника.

В общем случае квадратичного потенциала  $U$  квадратичную форму можно привести к главным осям ортогональным преобразованием (в смысле метрики, определённой кинетической энергией). Получим систему независимых осцилляторов. Возвращаясь к струне, можно сказать, что она представляет собой бесконечную систему независимых маятников.

**Доказательство теоремы 1.** Для простоты, чтобы не писать индексов, будем считать, что  $q \in \mathbb{R}$ . Имеем лагранжиан  $L(q, \dot{q}, t)$ . Рассмотрим вариацию движения  $\delta q(t)$ ,  $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$  (см. рис. 6.4).

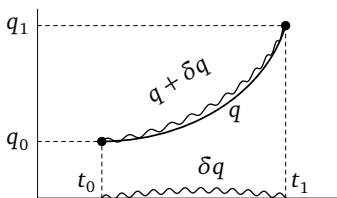


Рис. 6.4. Вариация движения

Вычислим приращение лагранжиана:

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta \dot{q}) + o(\delta).$$

Теперь найдём главную линейную часть приращения действия:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta \dot{q}) \right) dt \stackrel{(1)}{=} \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \left( \left( -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta q \left( -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} \right) dt. \end{aligned}$$

Переход (1) — интегрирование по частям, причём мы учли, что подстановка равна 0, так как на концах отрезка вариация траектории равна 0.

Если траектория критическая, то последнее выражение тождественно равно 0. Тогда

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} \equiv 0,$$

иначе можно было бы так подобрать вариацию  $\delta q$ , чтобы интеграл не был равен 0 (это упражнение). Теорема доказана.  $\square$

В случае свободного движения частиц лагранжиан имеет вид  $L = T$ . Из уравнений Эйлера — Лагранжа сразу получается, что критические траектории — прямые. На них достигается минимум интеграла. Для задачи о кратчайшем пути  $L = \sqrt{2T}$  экстремали опять прямые и на них достигается минимум.

**Важное замечание.** Эта теория не зависит от системы координат. Поэтому если некоторое уравнение есть уравнение Эйлера — Лагранжа, то оно имеет вид Эйлера — Лагранжа в любой другой системе координат. Следовательно, достаточно делать замену координат только в лагранжиане.

**Упражнение.** Рассмотрим равномерное движение  $q(t)$  частиц по прямым, тогда  $q(t)$  — решение уравнения  $\ddot{q} = 0$ . Запишите соответствующее уравнение в полярных координатах.

Подробнее о методах вариационного исчисления см. [2, гл. 3], там же имеются дальнейшие ссылки.

Из нашей теории получается мощный метод исследования системы в окрестности критической точки по отношению к отклонению от положения равновесия потенциальной энергии, например минимума. Заменяем потенциал его квадратичной частью, ошибка в правой части уравнения (т. е. в силе) будет второго порядка малости по сравнению с отклонением от положения равновесия; линейная же часть при этом не изменится, так что описанная замена есть просто линеаризация. Квадратичную форму кинетической энергии, зависящую от положения  $q$  как от параметра, заменим постоянной формой, взятой в точке минимума. В конечномерном случае кинетическая и потенциальная энергия будут иметь вид

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}), \quad U = \frac{1}{2}(Bq, q).$$

Первая форма положительно определена, а вторая — не обязательно, если исходная критическая точка потенциальной энергии не минимум.

Известно, что две такие формы можно одновременно привести к главным осям. Это приведение второй формы к главным осям ортогональным преобразованием, где первая форма задаёт евклидову структуру пространства. Практически для этого надо решить харак-

теристическое уравнение  $\det(B - \lambda A) = 0$ . Исторически это уравнение возникло у Лагранжа при изучении вековых колебаний орбит планет около кеплеровских орбит, поэтому характеристическое уравнение называлось секулярным (вековым).

Итак, в теории малых колебаний кинетическая энергия  $T$  по определению задаёт евклидову структуру в конфигурационном пространстве, а потенциальная энергия  $U$  — квадратичная форма в этом пространстве. В декартовых координатах уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид  $\ddot{q} = -\nabla U = -Bq$ .

Существует простой геометрический способ отыскания главных осей. Рассмотрим эллипсоид уровня квадратичной формы  $(Bq, q)$ . Точка, самая далёкая от начала координат в смысле заданной евклидовой структуры, определит первый собственный вектор (первую главную ось). Остальные главные оси лежат в ортогональном дополнении к первой, и соответствующая гиперплоскость пересекает эллипсоид по эллипсоиду меньшей размерности; к нему снова надо применить указанную процедуру и т. д. (см. рис. 6.5). Замечательно, что этот метод работает и в бесконечномерном пространстве.

В главных осях система распадается на одномерные уравнения, которые явно решаются (выпишем решения в случае положительно определённой формы  $B$ ):

$$\ddot{q}_k = -\lambda_k q_k,$$

$$q_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \quad \text{где } \omega_k = \sqrt{\lambda_k}.$$

Эти формулы описывают независимые гармонические собственные колебания по ортогональным направлениям. Если частоты несоизмеримы, то движение в целом непериодическое.

Удобно записывать соответствующее собственным колебаниям решение в комплексной форме:

$$q(t) = \operatorname{Re}(A_k e^{i\omega_k t} \xi_k),$$

здесь  $A_k$  — комплексная амплитуда,  $\xi_k$  — собственный вектор. Все решения получаются сложением этих: всякое колебание представляет собой суперпозицию собственных колебаний. Исходная система

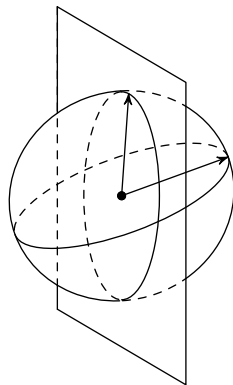


Рис. 6.5. Отыскание главных осей

оказывается, таким образом, системой из  $n$  невзаимодействующих осцилляторов.

При увеличении потенциальной энергии  $U$  все собственные частоты растут (доказательство см. в [2]). Отсюда получаются следующие простые, но замечательные факты об эллипсоидах:

- если один эллипсоид находится внутри другого, то каждая ось меньшего меньше соответствующей оси большего;
- рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью, проходящей через его центр, тогда оси сечения имеют промежуточные значения между осями исходного эллипсоида (см. рис. 6.6).

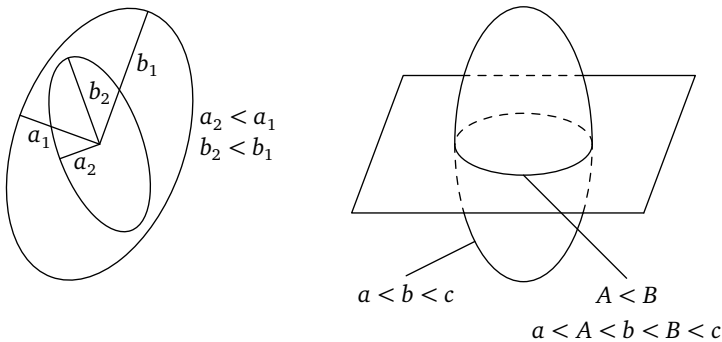


Рис. 6.6. Соотношения между осями эллипсоидов

Практически эффект наблюдается, например, при заделывании трещины в колоколе: треснутый колокол звучит глухо, при заделывании трещины начинает звучать звонче.

Подробнее о малых колебаниях см. [2, гл. 5], а также [4, § 25, п. 6].

Чтобы обобщить нашу теорию на бесконечномерные системы, потребуется обоснование. Но сначала посмотрим, какие получатся результаты.

В случае одномерной закреплённой на концах струны конфигурационным пространством является пространство функций  $u(x)$ :  $u(0) = u(l) = 0$ . Предположим, что эти функции гладкие. Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Потенциальная энергия есть работа по приведению струны в заданную форму  $u(x)$ . Предположим, что эта форма мало отличается от стационарного положения  $u \equiv 0$ . При вычислении потенциальной энергии в приближении теории малых колебаний мы должны учитывать члены порядка  $u^2$ , но можем пренебрегать членами высшего порядка ( $u^3$  и т. д.) Поскольку на изгибание струны работа не затрачивается, вся работа идёт на удлинение струны от исходной длины  $l$  до новой длины — длины графика функции  $u(x)$ .

**Лемма.** *Потенциальная энергия туго натянутой струны пропорциональна её удлинению (в приближении малых колебаний) с коэффициентом, пропорциональным силе натяжения.*

**Доказательство.** По закону Гука сила натяжения пропорциональна удлинению. Удлинение — величина второго порядка малости по отношению к отклонению струны. Следовательно, величину силы натяжения деформируемой струны можно считать постоянной и не зависящей от формы струны (в рамках приближения малых колебаний, т. е. когда энергия вычисляется с учётом величин второго порядка малости по отношению к отклонению, но не третьего; в этом приближении силу достаточно вычислять, сохраняя члены первого порядка малости по отношению к отклонениям и пренебрегая величинами второго порядка малости).

Если сила натяжения при деформации постоянна, то энергия элемента струны вычисляется как работа этой постоянной силы на элементе пути и потому (в рассматриваемом приближении) пропорциональна удлинению этого элемента (и величине силы натяжения).

Суммируя потенциальные энергии всех элементов деформированной струны, мы получаем, что её потенциальная энергия в рассматриваемом приближении равна произведению величины силы растяжения на удлинение всей струны.

Пренебрегая малыми выше второго порядка по отношению к  $u$ , мы в итоге получаем следующее выражение для потенциальной энергии:

$$U = F \int_0^b \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) dx \approx \frac{F}{2} \int_0^b \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad \square$$

**Замечание.** К тому же выражению можно было прийти, рассматривая модель с бусинками и пружинками вычисляя силу, действующую на  $i$ -ю бусинку со стороны  $(i-1)$ -й и  $(i+1)$ -й (считая, что бусинка движется по нормали к невозмущённой струне). Нормальные

к невозмущённой струне проекции этих двух сил в первом приближении пропорциональны разностям отклонений соседних бусинок  $q_i - q_{i-1}$  и  $q_{i+1} - q_i$  соответственно (с разными знаками и с общим коэффициентом  $F$ , равным натяжению струны).

Потенциальная энергия

$$U = \sum \frac{F}{2} (q_{i+1} - q_i)^2$$

приводит именно к такой силе, действующей на  $i$ -ю бусинку:

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = F[(q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1})] = F(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}).$$

В пределе сумма превращается в полученный при доказательстве леммы интеграл.

Лагранжиан имеет вид  $L = T - U$ .

Чтобы записать уравнение Эйлера — Лагранжа, найдём импульсы и силы.

Очевидно,  $p(x) = \partial u / \partial t$  (если струна однородна и везде имеет плотность 1).

Потенциальная энергия в допредельном случае равна

$$\frac{F}{2} \sum (q_{i+1} - q_i)^2,$$

где  $q_i = u(x_i)$  (см. рис. 6.7).

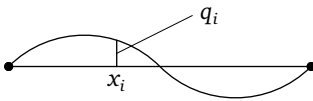


Рис. 6.7. Дискретная модель струны

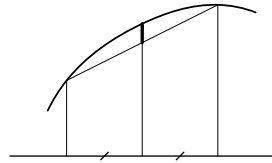


Рис. 6.8. Вторая разность

Чтобы найти силу, возьмём производную по  $q_i$  и получим

$$-F(q_{i+1} - q_i) + F(q_i - q_{i-1}) = -F(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}).$$

В скобках стоит не что иное, как вторая разность (см. рис. 6.8), которая после предельного перехода превратится во вторую производную  $\partial^2 u / \partial x^2$ .

Итак, после предельного перехода уравнение Эйлера — Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$



т. е. вид волнового уравнения. Коэффициент  $k$  прямо пропорционален натяжению струны и обратно пропорционален её плотности. Метод решения у нас уже есть — будем искать собственные колебания. Надо найти главные оси квадратичной формы потенциальной энергии в метрике, заданной кинетической энергией. В конечномерном случае мы писали

$$q(t) = Ae^{i\omega t} \xi.$$

Значит, для струны надо искать решение в виде  $u = e^{i\omega t} \xi(x)$ .

Подставим это решение в уравнение:

$$-\omega^2 e^{i\omega t} \xi(x) = ke^{i\omega t} \xi''(x).$$

Придём к задаче на собственные функции:  $\xi''(x) = -\lambda \xi$ ,  $\lambda = \omega^2/k$ .

Это применение общей теории собственных колебаний называется *методом разделения переменных*. Решение имеет вид

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos \sqrt{\lambda} x + b \sin \sqrt{\lambda} x; & \xi(0) = 0 &\Rightarrow a = 0; \\ \xi(l) = 0, & \sin \sqrt{\lambda} l = 0, & \sqrt{\lambda} l = n\pi; & \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}; & \omega \sim n. \end{aligned}$$

Мы видим, что есть счётное количество главных осей и собственных функций; при увеличении номера  $n$  собственные частоты растут. При умножении собственной функции на вещественную часть комплексной экспоненты времени получим стоячую волну (см. рис. 6.9): форма волны не меняется, по  $t$  происходят гармонические колебания.

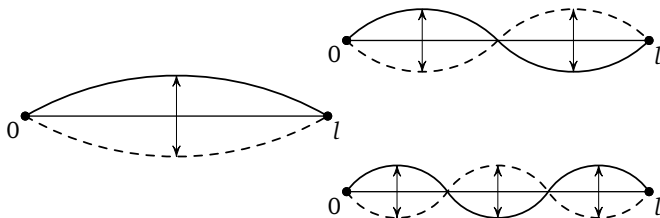


Рис. 6.9. Стоячие волны

В конечномерном случае всякие колебания разлагались в суперпозицию собственных. В случае уравнения струны это тоже верно, но требует отдельного доказательства (доставляемого теорией рядов Фурье, для того и созданной; поэтому теорию рядов Фурье и её обобщения называют также *гармоническим анализом*).

Обоснование возможности применения теории колебаний к системам с бесконечным числом степеней свободы (вроде струны) было

получено математиками довольно поздно (в конце XIX – начале XX века) и привело к созданию функционального анализа, а затем — квантовой механики. Однако сама общая алгебраическая структура теории колебаний как с конечным, так и с бесконечным числом степеней свободы — теория гораздо более фундаментальная (и использовавшаяся физиками с полным успехом задолго до строгого математического обоснования).

Положение здесь сходно с обоснованием теории вещественных чисел (полученным, строго говоря, лишь в XIX веке). Древним грекам времён Пифагора пришлось засекретить теорему о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, подрывавшую веру в могущество чисел (которые в те времена понимались лишь как рациональные).

Это не помешало Ньютону создать анализ, не останавливаясь на деталях обоснования арифметики действительных чисел (впрочем, ему хорошо известных). Автор настоящего курса стремился научить слушателей скорее искусству угадывать и предсказывать смелые обобщения (подобные переходу от колебаний с конечным числом степеней свободы к колебаниям сплошных сред), чем трудному ремеслу строгого обоснования этих результатов (включающего неизбежное исследование минимальной необходимой гладкости изучаемых объектов).

Сейчас в аналогичном теории колебаний сплошных сред и теории вещественных чисел положении находится квантовая теория поля, доставляющая наиболее поразительные математические результаты, но не их обоснования.

**Задача** (Штурм, Гурвиц). Рассмотрим вещественную  $2\pi$ -периодическую функцию

$$f(x) = \sum_{k \geq N} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

ряд Фурье которой начинается с  $N$ -х гармоник. Докажите, что число нулей функции  $f$  на окружности  $\{x \bmod 2\pi\}$  не меньше, чем число нулей первой гармоники, входящей в ряд с ненулевым коэффициентом (т. е. не меньше чем  $2N$ ).

**Пример.** При  $N = 1$  число нулей не меньше двух. Это неравенство Морса: функция на окружности имеет не менее двух критических точек.

ЛИТЕРАТУРА К ЛЕКЦИИ 6: [2], [4], [6], [8].

## Лекция 7

# Теория колебаний. Вариационный принцип (продолжение)

Итак, кинетическая и потенциальная энергии струны (см. рис. 7.1) имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{u}^2 dx, \quad U = \frac{k}{2} \int_0^l (u_x)^2 dx.$$

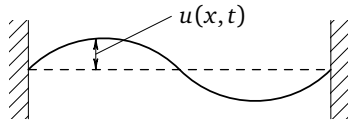


Рис. 7.1. Струна

Лагранжиан равен  $L = T - U$ , и из вариационного принципа

$$\delta \int L dt = 0$$

следует уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

которое в нашем случае имеет следующий вид уравнения колебаний струны:

$$u_{tt} = ku_{xx}.$$

Эти результаты можно обобщить на многомерный случай. Пусть колеблется тело произвольной размерности, например, при  $n = 2$  это мембрана. Мембрану, как и струну, можно представлять себе в виде предела системы колеблющихся шариков, соединённых пружинками (см. рис. 7.2).

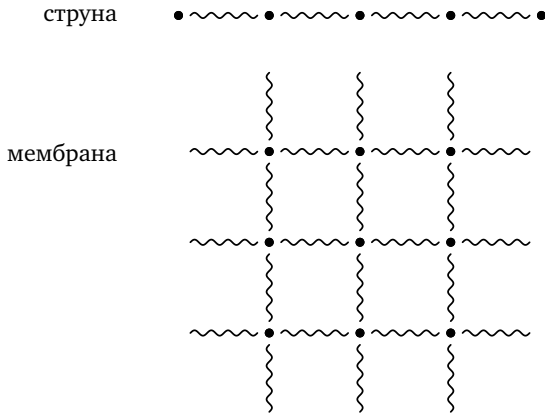


Рис. 7.2. Аппроксимации струны и мембраны

В случае мембраны или многомерного тела кинетическая энергия выражается аналогично случаю струны:

$$T = \frac{1}{2} \iint \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Под интегралом имеется в виду соответствующий многомерный интеграл.

Заметим, что можно рассматривать колебания не только в одном направлении, а в нескольких, и тогда  $u$  становится вектор-функцией (геометрически это означает, что положение равновесия отвечает нулевому сечению расслоения, а само расслоение может быть любым). Кинетическая энергия записывается той же формулой, только подынтегральная функция — скалярный квадрат вектора скорости.

Как выражается потенциальная энергия? Сообщим ответ:

$$U = \frac{k}{2} \int (\nabla u)^2 dx,$$

где

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

— градиент. Этот интеграл называется *интегралом Дирихле*.

Дирихле занимался в основном теорией чисел, но он же заметил, что гармонические функции минимизируют этот интеграл (при соответствующих граничных условиях). Эта физическая идея — так называемый принцип Дирихле — оказалась мощнейшим орудием как для доказательства существования решений соответствующих задач,

так и для их исследования и даже практического приближённого вычисления. Интересно отметить, что с этим интегралом и его обобщениями связаны попытки доказать гипотезу о нулях дзета-функции. Гипотеза состоит в том, что все нетривиальные комплексные нули дзета-функции лежат на одной вещественной прямой. Идея (восходящая по меньшей мере к Гильберту) заключается в том, чтобы найти задачу о колебаниях, через собственные числа которой выражаются нули дзета-функции. Из вещественности собственных чисел следует их расположение на одной вещественной прямой в комплексной плоскости.

**Задача.** Найдите минимум интеграла Дирихле на пространстве гладких функций на сфере.

**Решение.** Для константы интеграл равен нулю, а для непостоянной функции он положителен. Следовательно, минимум равен нулю и достигается только на постоянных функциях.

Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют в многомерном случае вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k\Delta u,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

— оператор Лапласа в декартовых координатах. На самом деле оператор Лапласа зависит не от координат, а определяется евклидовой структурой пространства, как показывает следующая теорема.

**Теорема 1.** *Справедливо равенство  $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ .*

Прежде чем доказать теорему, напомним определения функционирующих в ней понятий и убедимся в их инвариантности.

Пусть  $u$  — функция, тогда её дифференциал  $du$  — 1-форма, действующая на касательный вектор  $\xi$ :  $du|_x(\xi) = (a_x, \xi)$ , поскольку в евклидовом пространстве любая 1-форма есть скалярное произведение на фиксированный в данной точке вектор. Этот вектор называется вектором градиента функции  $u$  в точке  $x$ :  $a_x = \operatorname{grad} u|_x$ . Таким образом, градиент определяется евклидовой структурой пространства (или, более общим образом, римановой метрикой многообразия).

В любых координатах имеем

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \right) (\xi) = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \xi_i.$$

В декартовых ортонормированных координатах это запись скалярного произведения векторов  $\xi$  и  $(\partial u/\partial x_1, \dots, \partial u/\partial x_n)$ , так что в декартовых ортонормированных координатах градиент функции  $u$  имеет компоненты  $(\partial u/\partial x_1, \dots, \partial u/\partial x_n)$ .

**Упражнение.** Найдите компоненты вектора  $\text{grad } u$  в полярных координатах на евклидовой плоскости и в сферических координатах в евклидовом трёхмерном пространстве.

Дивергенция векторного поля определена на многообразии, на котором задан элемент объёма, в частности на римановом многообразии.

Рассмотрим векторное поле

$$v = \sum v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

и соответствующий уравнению  $\dot{x} = v(x)$  фазовый поток в  $n$ -мерном пространстве.

Напомним определение потока поля через поверхность. Обозначим форму объёма через  $\tau = \tau^n$ . Форма объёма  $\tau^n$  —  $n$ -форма. Рассмотрим соответствующую вектору  $v$   $(n - 1)$ -форму  $i_v \tau$ . Эта форма получается подстановкой в  $\tau^n$  на первое место вектора  $v$ , остальные  $n - 1$  мест свободны.

Потоком поля  $v$  через  $(n - 1)$ -мерную ориентированную гиперповерхность называется интеграл от этой формы по гиперповерхности.

**Пример.** Пусть в декартовых ортонормированных координатах  $\tau = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Тогда

$$i_v \tau = v_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - v_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots \pm v_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}.$$

В частности, при  $n = 3$  для поля скоростей системы  $\dot{x} = P, \dot{y} = Q, \dot{z} = R$  получаем  $i_v \tau = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ .

Поток имеет ясный гидродинамический смысл: количество фазовой жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени (см. рис. 7.3).

Рассмотрим поток  $\bar{V}_\varepsilon$  поля  $v$  через малую сферу радиуса  $\varepsilon$  с центром  $x$ . Дивергенцией поля  $v$  в точке  $x$  называется предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{V}_\varepsilon}{\tau(\varepsilon)},$$

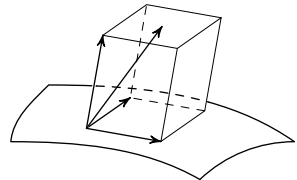


Рис. 7.3. Поток векторного поля через поверхность

где  $\tau(\varepsilon)$  — объём шара. Смысл дивергенции — «плотность источника» в данной точке.

Итак, дивергенция определена, если задана форма объёма. В частности, дивергенция определена в римановых и евклидовых пространствах. Дивергенция поля  $v$  на многообразии с элементом объёма  $\tau$  связана с внешним дифференцированием  $(n - 1)$ -форм (вовсе не зависящим от системы координат) соотношением

$$(\operatorname{div} v)\tau = d(i_v \tau).$$

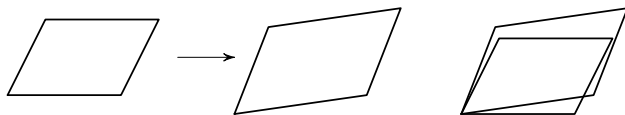
**Теорема 2.** *Дивергенция поля  $v$  в декартовых ортонормированных координатах есть след матрицы Якоби поля  $v$ :*

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

**Доказательство.** Рассчитаем новое положение точки  $x$  при движении по фазовому потоку поля  $v$  за малое время  $\varepsilon$ :

$$x \mapsto x + \varepsilon v(x) + o(\varepsilon).$$

Таким образом, элемент объёма подвергается малому линейному преобразованию (см. рис. 7.4).



**Рис. 7.4.** Малое линейное преобразование элемента объёма

**Лемма.** *В первом приближении вклад в изменение объёма параллелепипеда вносят изменения векторов только в своём собственном направлении.*

**Упражнение.** Докажите лемму.

Поскольку в определении дивергенции вместо сферы можно взять параллелепипед, натянутый на  $n$  векторов, при вычислении потока надо найти приращение его объёма при малом сдвиге вдоль  $v$ . В главном члене по лемме получится след матрицы Якоби  $v$ , умноженный на объём исходного параллелепипеда; при делении и переходе к пределу получится, что дивергенция равна этому следу. Теорема 2 доказана.  $\square$

В декартовых координатах элементарным вычислением получаем, что  $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ . Этой формулой оператор Лапласа определён на любом римановом многообразии.

**Задача.** Вычислите оператор Лапласа функции  $u$ , заданной на окружности  $x^2 + y^2 = 1$  на евклидовой плоскости.

О т в е т.  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ , где  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ .

Формула

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

справедлива лишь в декартовых ортонормированных координатах, в других координатах оператор выражается по-другому, даже если пространство евклидово.

**Упражнение.** Запишите оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических координатах.

**Замечание.** Как будет показано ниже, геометрический смысл интеграла Дирихле — главный член приращения площади мембраны. Замечательно, что он квадратичный.

Это совершенно очевидно в одномерном случае: при малом угле разность между катетом и гипотенузой имеет второй порядок малости (проверьте) (см. рис. 7.5). Этот простой факт имеет большие последствия и важные приложения.

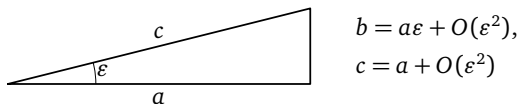


Рис. 7.5. Гипотенуза практически равна катету

**Примеры.** 1. Возвращаясь домой по синусоиде, вы увеличите себе путь совсем немного (примерно на 20 %), так как в увеличение пути вносят вклад лишь участки с большим наклоном, а их доля невелика (см. рис. 7.6).



Рис. 7.6. Синусоида не намного длиннее прямой



2. Немного отклонив двигатели от продольной оси самолёта, можно спасти хвостовое оперение от сгорания в струе, при этом ослабление тяги имеет лишь второй порядок малости (см. рис. 7.7). Например, даже при огромном отклонении в  $6^\circ$  получаем  $\varepsilon \approx 0,1$ , при этом потеря тяги составляет всего 0,5%.

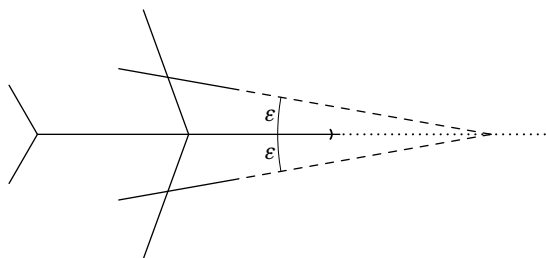


Рис. 7.7. Поворот двигателей практически не меняет силу тяги

3. Кеплер при обработке результатов астрономических наблюдений Тихо Браге (которые велись невооружённым глазом; ещё в конце XVII в. надо было доказывать, что наблюдения в телескоп дают не меньшую точность) вначале думал, что Марс движется вокруг Солнца по окружности, но Солнце находится не в центре. Действительно, рассмотрим эллипс с полуосями  $a$ ,  $b$  и малым эксцентриситетом  $e$  (см. рис. 7.8). Тогда

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = a\left(1 - \frac{e^2}{2} + \dots\right).$$

При малом  $e$  (для Марса примерно  $1/10$ ) разницу между эллипсом и окружностью заметить трудно, а разница между центром и фокусом хорошо заметна.

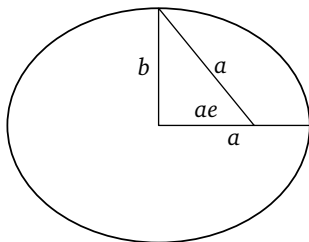


Рис. 7.8. Эллипс с малым эксцентриситетом почти неотличим от окружности

Это подтверждается и таким простым опытом. Капните в круглую чашку с чаем каплю близко к центру. Волны, отразившись от стенок, соберутся в симметричной относительно центра точке (см. рис. 7.9).

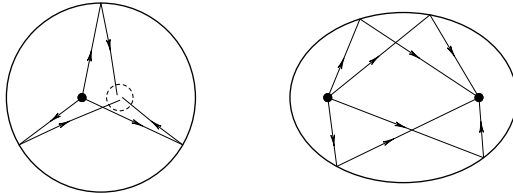


Рис. 7.9. Собиране волн в круге и эллипсе

Объяснение. Если в эллиптической чашке капнуть каплю чая точно в фокус, волны после отражения соберутся в другом фокусе. Окружность очень мало отличается от эллипса с малым эксцентриситетом. Поэтому волны собираются во втором фокусе этого близкого эллипса (но не точно, а немного размыто). При тщательном наблюдении можно заметить и вторичное собиране волн в исходной точке.

Теперь объяснение самого факта второго порядка малости различия: прямая даёт минимум функционала длины, поэтому приращение и не может быть первого порядка малости.

Вернёмся к геометрическому смыслу интеграла Дирихле. Утверждается, что это главная часть приращения площади, т. е. если  $S_0$  — площадь мембраны в положении равновесия, а  $S_\epsilon$  — площадь при отклонении  $\epsilon u$ , то нам надо доказать, что новая площадь  $S_\epsilon$  равна

$$S_0 + \frac{\epsilon^2}{2} \int (u_x)^2 dx + o(\epsilon^2)$$

(см. рис. 7.10). Посмотрим на изменение площади малой площадки. Выберем удобную систему координат: одна ось идёт вдоль  $\text{grad } u$ , другая — ортогонально (см. рис. 7.11). Тогда новая площадь есть произведение новых длин, при этом одна из длин не изменилась, а другая



Рис. 7.10. Изменение площади мембраны

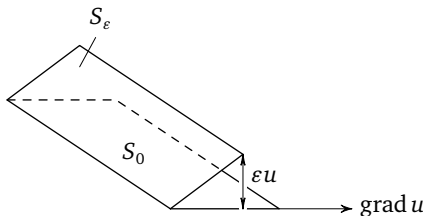


Рис. 7.11. Вычисление приращения площади

вычисляется, как в одномерном случае. В итоге получаем

$$S_\epsilon = S_0 \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{2} (\nabla u)^2 + \dots \right).$$

Остаётся проинтегрировать приращение по всей мембране.

Можно все вычисления провести в допредельной системе шариков на пружинках (см. рис. 7.12).

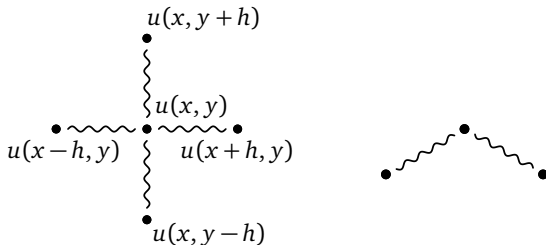


Рис. 7.12. Вычисление потенциальной энергии мембраны

Проделаем гомотопию \$au\$ от положения равновесия до отклонения \$\epsilon U\$, при этом надо найти член порядка \$\epsilon^2\$ в выражении для потенциальной энергии, т. е. работы по созданию такого отклонения. Вид сбоку в двух ортогональных направлениях такой же, как в одномерном случае (рис. 7.12), поэтому равнодействующие сил уже вычислены и представляют собой (при надлежащем выборе единиц измерения) вторые разности со знаком минус:

$$\begin{aligned} & -u(x-h, y) + 2u(x, y) - u(x+h, y), \\ & -u(x, y-h) + 2u(x, y) - u(x, y+h). \end{aligned}$$

При переходе к пределу получим члены вида \$-u\_{xx}\$, \$-u\_{yy}\$. При интегрировании по \$a\$ от 0 до \$\epsilon\$ получим

$$-\int \alpha \Delta u \, da \, u = -u \Delta u \int \alpha \, da = -\frac{\epsilon^2}{2} u \Delta u.$$

Наконец, при интегрировании по области имеем (с точностью до числового множителя)

$$U = - \iint \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) u \, dx \, dy.$$

Выполним интегрирование по частям (сначала по  $x$ ):

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \, dx = - \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \, dx + u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Учтём, что на границе  $u = 0$  (мембрана закреплена), тогда подстановка нулевая. Аналогично выполняется интегрирование по  $y$ . В итоге получим

$$U = \iint (\nabla u)^2 \, dx \, dy.$$

Таким образом, потенциальная энергия пропорциональна приращению площади. Уравнение Эйлера — Лагранжа в этом случае, как мы видели, — это волновое уравнение.

Попутно доказана формула

$$\int (\nabla u)^2 \, dx = - \int \Delta u \, u \, dx \quad (u|_{\partial\Omega} = 0).$$

Кроме того, мы вычислили силу, которая оказалась равна  $-\Delta u$ , поэтому волновое уравнение можно интерпретировать как уравнение Ньютона. Но можно просто честно посчитать  $\partial L / \partial q$ , раз нам известны  $T, U$ . Это квадратичные формы на бесконечномерном пространстве функций ( $\dot{q} = u_t, q = u$ ).

Найдём вариацию

$$\delta \int \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dx.$$

Пусть  $u = u_0(x) + \varepsilon \xi(x), \xi|_{\partial\Omega} = 0$ .

Нам надо найти коэффициент при  $\varepsilon$  в разложении интеграла и представить его как бесконечномерное скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \, dx &= \int \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \, dx + \varepsilon \int \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \, dx + \dots = \\ &= -\varepsilon \int \xi \Delta u \, dx + \int \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \, dx + \dots \end{aligned}$$

(при интегрировании по частям мы воспользовались тем, что  $\xi|_{\partial\Omega} = 0$ ). Первый из этих интегралов и есть скалярное произведение. Так что сила действительно равна  $-\Delta u$ .

Все эти рассуждения верны и для риманова многообразия.

Замечательный факт заключается в том, что волновым уравнением описывается широкий класс задач. Волновое уравнение можно получить исходя из предположения, что данная вариационная задача удовлетворяет некоторым условиям аксиоматического характера (правда, само вариационное происхождение задач математической физики остаётся без убедительного объяснения). Вот эти аксиомы.

1. Кинетическая энергия  $T$  есть квадратичная форма от скоростей, что означает *пространственную однородность* системы. Впрочем, в случае переменной плотности  $T$  выражалась бы похожей формой.

Ограничимся случаем однородной среды, где  $T$  есть интеграл от  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$ . Укажем, каким аксиомам должна удовлетворять квадратичная форма  $U$ , чтобы задача описывалась волновым уравнением.

2. Квадратичная форма  $U$  аддитивна и локальна, что физически означает отсутствие дальнего действия. Она может быть записана в виде

$$U = \frac{1}{2} (Au, u),$$

где  $A$  — линейный оператор, а скобка означает скалярное произведение (т. е. интеграл от произведения функций). Оператор  $A$  называется *локальным*, если значение функции  $Au$  в точке вычисляется через конечное число производных функции  $u$  в этой точке.

В нашем случае взаимодействуют только две соседние точки, что приводит к появлению в интеграле Дирихле только производных первого порядка  $u_x$  (а в соответствующем симметрическом операторе  $A = -\Delta$  — только вторых производных). Взаимодействие большего числа точек приведёт к появлению старших производных. Например, в задаче об изгибании тонкой пластины в уравнении появится оператор  $\Delta^2 u$ . В случае мембраны прирост энергии происходит только за счёт растяжения, но не изгибания. В случае пластинки энергия затрачивается и на изгибание. Это тоже пример локальной системы, но со старшими производными. Если же в форму потенциальной энергии войдут только производные первого порядка, то она будет иметь общий вид:

$$\sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} u + cu^2.$$

В каких случаях соответствующий симметрический оператор превращается в оператор Лапласа? Выпишем дальнейшие ограничения на оператор, действующий на функции в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

3. Однородность (инвариантность относительно сдвигов):

$$\Delta(u(x + a)) = (\Delta u)(x + a).$$

4. Изотропность (инвариантность относительно вращений  $g$ ):

$$\Delta(u(gx)) = (\Delta u)(gx).$$

Квадратичная форма от вектора градиента задаёт эллипсоид уровня в касательном пространстве в каждой точке. Пространство изотропно, если этот эллипсоид — сфера, т. е. свойства мембраны не зависят от поворота. Встречаются и неизотропные среды.

Из однородности и изотропности вытекает, что  $b = 0$ , поскольку линейная часть оператора есть скалярное произведение  $b$  на  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  и если бы вектор  $b$  был ненулевым, то свойства мембраны изменились бы при некотором повороте.

Член  $cu^2$  может присутствовать в однородной изотропной среде, например, он присутствует в задаче о колебании воздушного шара (тонкой оболочки) вокруг положения равновесия. Отсутствие этого члена связано со следующим ограничением.

5. Метрика пространства  $(x, u)$  не меняется при сдвигах вдоль оси  $u$ .

Все эти ограничения приводят к тому, что в уравнении останется лишь оператор Лапласа.

Рассмотрим теперь задачу о положениях равновесия — критических точках потенциальной энергии. Если  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , то  $0$  — устойчивое положение равновесия, это минимум интеграла Дирихле. Но можно рассматривать другие граничные условия. Например, рассмотрим струну с концами, закреплёнными в произвольных точках (см. рис. 7.13).

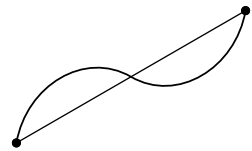


Рис. 7.13. Задача Дирихле для струны

В этом случае минимум потенциальной энергии достигается на прямой.

Поставим аналогичную задачу для мембраны:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Это задача Дирихле для уравнения Лапласа (см. рис. 7.14). Решения уравнения  $\Delta u = 0$  называются гармоническими функциями

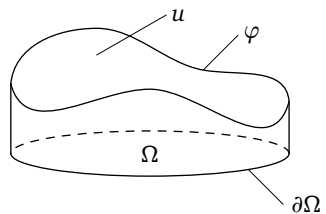


Рис. 7.14. Задача Дирихле для мембраны

в области  $\Omega$ . Решение задачи Дирихле мы будем искать в классе функций, непрерывных на замыкании  $\Omega$  и дважды дифференцируемых внутри.

Имеется общий приём нахождения минимума потенциала  $U$ . Для этого надо двигаться против градиента, т. е. вдоль векторного поля  $\dot{q} = -\nabla U$ . В случае положительно определённой квадратичной формы  $U$  таким способом мы обязательно придём к минимуму. В нашем случае уравнение градиентного спуска имеет вид

$$(\dot{q} =) \frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \quad (= -\text{grad } U).$$

В частности, для струны получим уравнение  $\partial u / \partial t = k u_{xx}$ , которое называется *уравнением диффузии* или *теплопроводности*.

Уравнение теплопроводности получается в задаче о распространении тепла. Рассмотрим нагреваемые элементы, расположенные в узлах решётки. В каждый следующий момент времени значение температуры в узле — некоторое взвешенное среднее значений в пяти точках (см. рис. 7.15). Для простоты нарисуем одномерный случай (тот же рисунок).

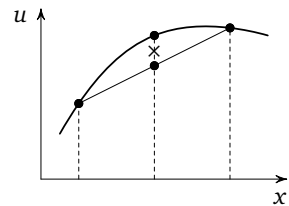
Усреднив, получим новую функцию, затем к ней применим ту же процедуру и т. д. Это не что иное, как реализация алгоритма градиентного спуска. Итак, распространение тепла происходит так же, как градиентным методом ищется минимум потенциальной энергии.

Если уравнение интерпретировать как уравнение диффузии, то функция  $u$  отвечает за плотность распределения частиц.

Оператор Лапласа возникает исходя из описанных условий инвариантности системы. Между прочим, в этом случае член  $cu$  в уравнении (соответствующий  $cu^2/2$  в потенциальной энергии) часто физически оправдан: он отвечает за рождение или смерть частиц в зависимости от знака  $c$ .

Способ отыскания стационарных решений (положений равновесия), таким образом, описан.

В специальных случаях удаётся найти явные решения. Сначала займёмся гармоническими функциями. Как решения линейного уравнения  $\Delta u = 0$ , они образуют линейное пространство. Попытаемся удовлетворить граничным условиям. При  $n = 1$  гармонические функ-



**Рис. 7.15.** Выравнивание температур узлов

ции линейные, их пространство двумерно, базис образуют функции  $(1, x)$ . Можно провести прямую (единственную) через две заданные точки и удовлетворить граничным условиям.

Пусть  $n = 2$ .

**Теорема 3.** *Отожествим вещественную плоскость с комплексной прямой. Пусть  $f(z)$  — голоморфная функция. Тогда  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$  — гармонические функции.*

**Упражнение.** Докажите теорему. Воспользуйтесь уравнениями Коши — Римана.

**Задачи.** 1. Пусть  $\varphi(x, y)$  — ориентированный угол, под которым виден из точки  $(x, y)$  фиксированный отрезок на плоскости. Докажите, что  $\varphi(x, y)$  — гармоническая вне концов данного отрезка (многозначная) функция от  $(x, y)$ .

2. Постройте ограниченную функцию, гармоническую внутри круга, непрерывную всюду, кроме двух данных точек на границе, и равную 0 на одной из дуг, на которые точки делят окружность, и 1 — на другой.

3. Аналогичная задача, когда окружность разбита на  $n$  дуг и даны  $n$  значений.

4. Найдите все гармонические функции на сфере (т. е. решите уравнение  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$ , где  $u$  — гладкая функция на сфере в  $\mathbb{R}^n$ ).

**У к а з а н и е.** Если функция не константа, то её интеграл Дирихле не равен 0 и функция не является критической точкой интеграла Дирихле. Значит,  $\Delta u \neq 0$ .

5. На вершинах куба в момент 0 задана функция. В каждый следующий момент  $(i + 1)$  значение в каждой точке заменяется средним арифметическим значений в соседних вершинах в предыдущий момент  $(i)$ . Найдите предел получающейся последовательности функций при  $i \rightarrow +\infty$ .

**У к а з а н и е.** Предельная функция «гармоническая».

6. Пусть  $u$  — однородная функция степени 0 в  $\mathbb{R}^n$  (т. е.  $u(\lambda x) = u(x)$  при любом  $x$  и любом  $\lambda > 0$ ). Докажите, что

$$r^2 \Delta u = \tilde{\Delta} u,$$

где  $\tilde{\Delta}$  на единичной сфере — оператор Лапласа  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  (т. е.  $(\tilde{\Delta} u)_{r=1} = \operatorname{div} \operatorname{grad}(u|_{r=1})$ ).



7. Пусть  $u$  — однородная функция степени  $k$  в  $\mathbb{R}^n$  (т. е.  $u(\lambda x) = \lambda^k u(x)$ ) при любом  $x$  и любом  $\lambda > 0$ ). Докажите, что

$$\tilde{\Delta}u = r^2 \Delta u - (k^2 + (n-2)k)u,$$

где  $\tilde{\Delta}u$  — однородная функция степени  $k$ , совпадающая при  $r = 1$  с  $\operatorname{div} \operatorname{grad}(u|_{r=1})$ .

В частности, для однородных функций степени  $k$  на плоскости ( $n = 2$ ) имеем

$$\tilde{\Delta}u = r^2 \Delta u - k^2 u,$$

а для однородных функций степени  $k$  в трёхмерном пространстве

$$\tilde{\Delta}u = r^2 \Delta u - (k^2 + k)u.$$

8. Найдите все гармонические в  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  однородные функции, зависящие только от  $r$ .

У к а з а н и е. Случай  $n = 2$  особый.

9\*. Докажите, что число областей, на которые нулевая линия уровня  $k$ -й собственной функции оператора Лапласа в комплексной области (с граничными условиями Дирихле) делит эту область, не больше  $k$ . (Этот результат верен на компактных римановых многообразиях любой размерности, например на сферах.)

Например, первая собственная функция (с наименьшим по модулю собственным числом) вовсе не меняет знака (она обращается в нуль лишь на границе области).

У к а з а н и е. Отношение интеграла Дирихле к интегралу квадрата собственной функции на каждой из  $N$  компонент дополнения к нулевой линии уровня собственной функции одинаково. Поэтому существует  $N$ -мерное пространство функций, на котором это отношение квадратичных форм такое же, как для собственной функции.

Из теорем лекции 6 об осях эллипсоидов следует, что номер оси  $k$  не меньше размерности  $N$ .

10. Рассмотрим собственные функции оператора Лапласа на торе размерности  $n$ :

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = -\lambda u, \quad (x_j \bmod a_j) \in T^n.$$

Обозначим через  $N(E)$  число собственных функций, для которых  $\lambda \leq E$ . Исследуйте поведение  $N(E)$  при  $E \rightarrow \infty$ .

У к а з а н и е. Оператор Лапласа коммутирует со сдвигами. Поэтому собственными функциями являются экспоненты

$$e_k(x) = e^{2\pi i(k,x)}, \quad (k,x) = \sum \frac{k_j x_j}{a_j}, \quad k_j \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, вопрос сводится к подсчёту числа целых точек в большом эллипсоиде.

О т в е т. Рассмотрим в пространстве кокасательного расслоения тора  $T^*T^n$  область  $\Omega(E)$ , заданную неравенством  $\sum \xi_j^2 \leq E$  ( $\xi_j$  — координаты формы  $\sum \xi_j dx_j$ ). Тогда при  $E \rightarrow \infty$  имеем

$$N(E) \sim (2\pi)^{-n} \text{Vol } \Omega(E) = \text{const} \cdot E^{n/2}.$$

**Замечание 1.** Аналогичная формула Вейля верна на любом многообразии и для любого «эллиптического» оператора, например для оператора второго или высшего порядка с переменными коэффициентами

$$P\left(x, i \frac{\partial}{\partial x}\right) = \lambda u.$$

Область  $\Omega$  в этом случае определяется условием  $\tilde{P}(x, \xi) \leq E$ , где  $\tilde{P}$  — сумма старших однородных членов по  $\xi$  многочлена  $P$  («главный символ»).

**Замечание 2.** Следующие члены асимптотики  $N(E)$  исследовать трудно даже для обычного оператора Лапласа при  $a_j = 2\pi$ . Беда в том, что на поверхности сферы  $\sum k_j^2 = E$  может оказаться много целых точек (иными словами, собственное число  $E$  может иметь большую кратность) — эта возможность реализуется, например, в случае оператора Лапласа на сфере  $S^2$ , для которого собственное число  $E$  имеет кратность порядка  $\sqrt{E}$  (см. лекцию 11).

## Лекция 8

### Свойства гармонических функций

В этой лекции мы будем заниматься свойствами гармонических функций в основном на плоскости, некоторые теоремы будут доказаны в  $n$ -мерном случае, а начнём с трёхмерного.

Рассмотрим функцию  $u = 1/r$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $(x, y, z)$  — декартовы координаты.

**Упражнение.** Проверьте, что функция  $u$  гармоническая.

Этот простой пример на самом деле является очень важным. Дело в том, что две важнейшие силы, изучаемые в физике, — сила тяготения и кулоновская сила — устроены следующим образом: они действуют вдоль соединяющей частицы прямой, а по абсолютной величине обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними.

Но тогда потенциал, градиентом которого является сила притяжения к одной частице, пропорционален  $1/r$  — гармонической функции. Линейная комбинация гармонических функций является гармонической функцией. Поэтому потенциал силы притяжения к конечному числу частиц является гармонической функцией.

От конечного числа частиц можно перейти к непрерывно распределённой массе (заряду) с плотностью  $\rho(x)$  в некоторой области  $D$ . Тогда потенциал поля притяжения к этому телу в некоторой точке  $x$  вычисляется по формуле

$$\int_D \frac{\rho(y) dy}{|x - y|}$$

(см. рис. 8.1), причём эта функция от  $x$  гармоническая в области, свободной от массы (или зарядов). Таким образом, фундаментальные законы природы связаны с гармоническими потенциалами.

Попытаемся понять без вычислений, почему функция  $u = 1/r$  гармоническая, т. е. почему  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$ .

Прежде всего,  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$  в точке  $x$  зависит лишь от  $r$  — расстояния от точки  $x$  до 0, т. е.  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u(x) = f(\|x\|)$ . Далее, рассмотрим

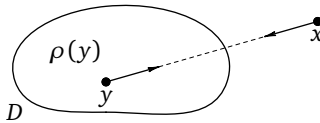


Рис. 8.1. Гравитационное поле

область, расположенную между концентрическими сферами радиусов  $r$  и  $R$ ,  $r < R$ . Вычислим поток градиента через границу этой области. Градиент функции  $u$  направлен к точке 0 и ортогонален рассматриваемым сферам. Площадь внешней сферы в  $(R/r)^2$  раз больше площади внутренней сферы. Но величина градиента на внешней сфере ровно в то же число раз меньше, чем на внутренней (сила обратно пропорциональна квадрату расстояния). Значит, потоки градиента через внутреннюю и внешнюю сферу в точности равны, т. е. поток градиента через границу области в точности равен нулю. Откуда вытекает равенство нулю  $\operatorname{div} \operatorname{grad}(1/r)$ . Впрочем, конечно, равенство  $\Delta(1/r) = 0$  можно проверить дифференцированием.

Теперь перейдём к случаю плоскости. Рассмотрим голоморфную функцию  $f(z)$  на плоскости или в области, тогда по ней легко строятся гармонические функции:  $\operatorname{Re} f(z)$ ,  $\operatorname{Im} f(z)$ ,  $\ln |f(z)|$ ,  $\arg f(z)$  (последние две — вещественная и мнимая части голоморфной функции  $\ln |f(z)|$ ) и т. п. Верно и обратное: всякая гармоническая функция получается таким способом.

**Теорема 1.** *Всякая гармоническая функция в односвязной области плоскости есть вещественная часть голоморфной функции, которая определена в этой области с точностью до аддитивной мнимой постоянной.*

**Доказательство.** Ищем голоморфную функцию в виде  $f = u + iv$ , гармоническая функция  $u$  нам задана, а  $v$  надо найти. В силу условий Коши — Римана  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ , тогда  $dv = \alpha$ , где

$$\alpha = (-u_y) dx + u_x dy.$$

В односвязной области функция  $v$  с таким дифференциалом существует, если  $d\alpha = 0$ . В этом случае можно определить  $v(x)$  как  $\int_{x_0}^x \alpha$  и интеграл не будет зависеть от пути в области, так как в силу формулы Стокса интеграл по любому замкнутому пути будет нулевым. Итак, осталось проверить выполнение условия  $d\alpha = 0$ . Но

$$d\alpha = (u_{xx} + u_{yy}) dx \wedge dy = 0,$$

поскольку  $u$  — гармоническая функция. Следовательно, функция  $v$  существует и определена с точностью до вещественной аддитивной постоянной.  $\square$

Мы видим, что на плоскости теории гармонических и аналитических функций по существу совпадают, первые — вещественные части последних. Это определяет роль аналитических функций в математической физике, с их помощью можно получить явные решения многих задач, например задачи об обтекании крыла потоком воздуха (Н. Е. Жуковский).

**Теорема 2** (теорема о среднем). *Среднее значение гармонической функции на окружности равно значению в центре* (см. рис. 8.2):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \, d\varphi = u(0).$$

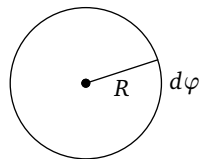


Рис. 8.2. Теорема о среднем

Ниже мы докажем аналогичную теорему в многомерном случае и увидим, что это свойство гармонической функции можно принять за её определение.

**Доказательство.** Как мы знаем,  $u = \operatorname{Re} f$ , где функция  $f$  голоморфна. Рассмотрим представление интегралом Коши:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Это равенство верно для любой кривой  $\gamma$ , охватывающей точку 0.

В вещественной теореме мы будем явно использовать тот факт, что контур  $\gamma$  — окружность. Запараметризуем точку окружности:  $t = Re^{i\varphi}$ , тогда

$$\frac{dt}{t} = \frac{iRe^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i d\varphi.$$

Подставим все в интеграл Коши:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d\varphi, \quad f = u + iv.$$

Получим нужное равенство отдельно для вещественной и мнимой частей. Теорема доказана.  $\square$

В многомерном случае теории гармонических и аналитических функций расходятся.

## 1. Следствия из теоремы о среднем

**1. Принцип максимума.** Гармоническая функция не достигает экстремума внутри области. Точнее, пусть  $u(x_0, y_0) = \max u(x, y)$ . Тогда если  $(x_0, y_0) \in D$ , то  $u \equiv \text{const}$ .

**Доказательство.** Пусть точка максимума  $(x_0, y_0)$  внутренняя. Возьмём малую окружность с центром в ней (см. рис. 8.3). Если значение в некоторой точке  $(x_1, y_1)$  окружности меньше, чем в точке  $(x_0, y_0)$ , то по непрерывности оно меньше и на целой дуге, и тогда нарушится теорема о среднем. Значит, функция постоянна в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Другими словами, множество точек области, в которых  $u(x_0, y_0) = \max u(x, y)$ , открыто. Но это множество, очевидно, замкнуто, т. е. множество внутренних точек максимума либо пусто, либо совпадает с компонентой связности. Получим, что функция постоянна на всей компоненте связности, содержащей  $(x_0, y_0)$ .  $\square$

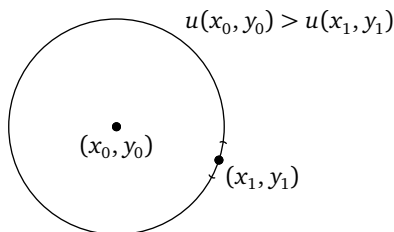


Рис. 8.3. Принцип максимума

Это доказательство основано лишь на теореме о среднем, так что принцип максимума будет доказан и в многомерном случае, как только мы докажем многомерную теорему о среднем.

С точки зрения теории аналитических функций принцип максимума является проявлением локального сохранения области. Дей-

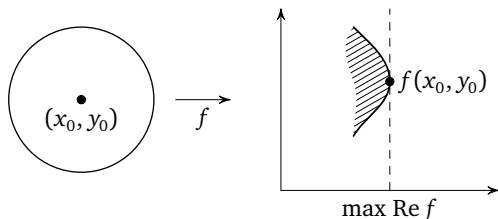


Рис. 8.4. Принцип максимума и принцип сохранения области

ствительно, если бы вещественная часть аналитической функции могла достигать экстремума во внутренней точке, нарушился бы принцип сохранения области (см. рис. 8.4).

**2. Единственность.** *Непрерывное решение задачи Дирихле в связанной ограниченной области единственно.*

**Доказательство.** Разность двух решений есть функция, гармоническая внутри области и тождественно равная нулю на границе. Поскольку область ограничена, максимум и минимум этой разности достигаются (либо внутри области, либо на границе). Если максимум или минимум достигаются внутри, то разность — константа и, значит, она равна нулю, а если на границе, то разность имеет равные нулю максимум и минимум и тоже равна нулю. Итак, по принципу максимума разность тождественно равна нулю в области.  $\square$

Заметим, что единственность решения задачи Дирихле имеет место для непрерывных функций, удовлетворяющих теореме о среднем, т. е. существует не более одной непрерывной функции, удовлетворяющей теореме о среднем, с заданным значением на границе ограниченной области.

**Замечание.** В неограниченных областях решение не единственно. Например, функция  $x$  гармонична в полуплоскости  $x > 0$ , непрерывна в замыкании этой полуплоскости и равна нулю на её границе, но не внутри.

**Теорема 3.** *Если непрерывная функция удовлетворяет теореме о среднем, то она является гармонической.*

**Доказательство.** Рассмотрим задачу Дирихле (в обычном смысле, т. е. для гармонической функции) в области с граничным значением, равным значению нашей функции. (Позднее мы докажем, что решение существует.) Рассмотрим разность решения и нашей функции. Она нулевая на границе, удовлетворяет теореме о среднем и, значит, тождественно равна нулю в области.  $\square$

**Замечание.** То, что ядро оператора Лапласа состоит из очень гладких функций — вещественных частей аналитических функций, — заложено в природе этого оператора. Для волнового оператора картина совсем другая. Особенность данных Коши распространяется вдоль характеристик, так что решения волнового уравнения не более гладкие, чем начальные данные.

Перейдём к решению задачи Дирихле. Сначала построим решение для круга.

Схема первого способа. Накопим достаточный запас гармонических функций в круге. Рассмотрим на границе круга функцию  $\cos n\varphi$ . Есть ли аналитическая функция с такой вещественной частью? Есть, это функция

$$f_n(z) = \left(\frac{z}{R}\right)^n = \left(\frac{|z|}{R}\right)^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

У функции  $if_n(z)$  вещественная часть на границе  $|z| = R$  равна  $\sin n\varphi$ , так что мы можем решить задачу Дирихле, если граничное условие имеет вид  $\cos n\varphi$  или  $\sin n\varphi$ . Но мы знаем, что любое граничное условие можно разложить в ряд по этим функциям, значит, сможем решить задачу и с любым граничным условием.

Реализуем первый метод в задаче Дирихле для круга. Разложим граничное условие в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Перейдя к полярным координатам, запишем гармоническое продолжение на круг функций  $\cos n\varphi$ ,  $\sin n\varphi$ :

$$\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\alpha, \quad \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\alpha.$$

В итоге получим решение в виде ряда:

$$u(r, \alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum \left( a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\alpha + b_n \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\alpha \right). \quad (1)$$

Наша цель — представить его в интегральной форме. Коэффициенты Фурье равны

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\beta) \cos n\beta \, d\beta,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\beta) \sin n\beta \, d\beta,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\beta) \, d\beta.$$



Подставим эти значения в формулу (1), получим

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\beta) \left[ \sum \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \right] d\beta,$$

где

$$z = (r, \alpha), \quad \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\alpha - \beta) = \operatorname{Re} \left(\frac{z}{t}\right)^n, \quad t = Re^{i\beta}.$$

Просуммировав геометрическую прогрессию:

$$\left(1 + \frac{z}{t} + \left(\frac{z}{t}\right)^2 + \dots\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - \frac{z}{t}} - \frac{1}{2} = \frac{t}{t - z} - \frac{1}{2},$$

получим

$$u(r, \alpha) = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \operatorname{Re} \left(\frac{t+z}{t-z}\right) d\varphi.$$

Преобразуем ядро:

$$\frac{t+z}{t-z} = \frac{(t+z)\overline{(t-z)}}{(t-z)\overline{(t-z)}}.$$

Вещественная часть числителя есть  $t\bar{t} - z\bar{z} = R^2 - r^2$ , так как оставшееся выражение  $t\bar{z} - z\bar{t}$  чисто мнимое.

Знаменатель равен

$$|t-z|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \beta).$$

Получим ядро Пуассона

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \beta)}.$$

В итоге

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \beta)} f(\beta) d\beta.$$

**Задача.** Докажите, что этот интеграл получится при конформном преобразовании решения, полученного нами ниже для полуплоскости (второй способ).

По теореме Римана любую односвязную ограниченную область можно конформно отобразить на круг, а значит, можно получить решение задачи Дирихле в произвольной такой области при помощи ядра Пуассона, если конформное отображение известно.

Схема второго способа.

**Задача.** Пусть  $u$  — решение задачи Дирихле в области  $D_1$ , и пусть  $f: D_1 \rightarrow D_2$  — конформное отображение областей. Постройте задачи Дирихле в области  $D_2$ . Попробуйте убедиться в пригодности построенного решения без вычисления оператора Лапласа.

Мы знаем, что круг можно конформно отобразить на полуплоскость. Попробуем для полуплоскости решить задачу Дирихле:  $\Delta u = 0$ ,  $u(x, 0) = g(x)$ .

Заметим сначала, что для простого граничного условия, изображённого на рис. 8.5, решение представляется функцией  $\frac{1}{\pi} \varphi_a(x, y)$ , где

$$\varphi_a(x, y) = \operatorname{Im} \ln(z - a) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x - a}.$$

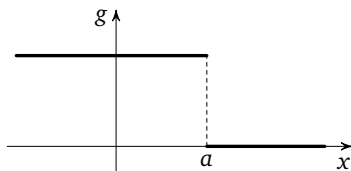


Рис. 8.5. Граничное условие задачи Дирихле в полуплоскости

Действительно, эта функция гармоническая на полуплоскости и удовлетворяет граничному условию, изображённое на рис. 8.5. Теперь рассмотрим функцию «угол»:

$$F_{ab}(x, y) = \frac{1}{\pi} (\varphi_b(x, y) - \varphi_a(x, y))$$

(см. рис. 8.6); она гармоническая на полуплоскости и удовлетворяет краевому условию  $g(x) = 1$  при  $a < x < b$  и  $g(x) = 0$  при  $x < a$  и  $x > b$ .

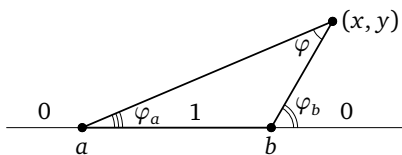


Рис. 8.6. Функция «угол»

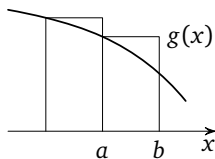


Рис. 8.7. Аппроксимация кусочно постоянным краевым условием

Произвольное (скажем, непрерывное и равное 0 вне конечного отрезка) граничное условие  $g(x)$  на прямой приблизим кусочно постоянной функцией (см. рис. 8.7). Соответствующая гармоническая функция имеет вид

$$\sum \frac{F_{ab}g(a)(x-a)}{b-a}.$$

Переходя к пределу при измельчении разбиения, получим гармоническую функцию с граничным условием  $g(x)$ , записанную в виде такой интегральной формулы:

$$\int \lim_{b \rightarrow a} \frac{F_{ab}(x, y)}{b-a} g(a) da.$$

Функция

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{F_{ab}(x, y)}{b-a}$$

в этом интеграле называется ядром. Изучим её линии уровня. Картина линий уровня функции  $F_{ab}(x, y)$  изображена на рис. 8.8, конформное отображение, оставляющее на месте 0 и переводящее  $a$  в  $\infty$ , переводит эту картину в простую картину линий уровня угла. При делении на длину отрезка и переходе к пределу получится такая картина линий уровня, как на рис. 8.9.

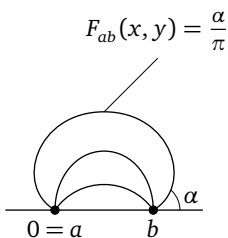


Рис. 8.8. Линии уровня функции  $F_{ab}$

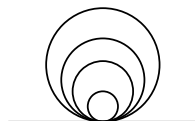
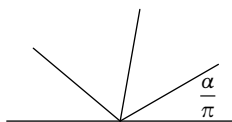


Рис. 8.9. Линии уровня ядра

Понятно, что при этом дадут вычисления: производная по параметру  $a$  от функции

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$$

есть

$$\frac{d}{da} \left( \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \left( \frac{y}{x-a} \right)^2} \frac{y}{(x-a)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Окончательно имеем

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} g(a) da.$$

Картина линий уровня ядра (см. рис. 8.10) хорошо нам известна из физики — это картина эквипотенциальных линий так называемого диполя (силовые линии диполя, ортогональные эквипотенциальным, образуют такую же картину).

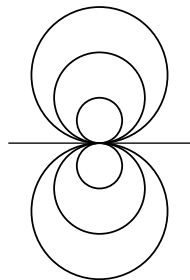


Рис. 8.10. Диполь

## 2. Теорема о среднем в многомерном случае

**Принцип максимума в многомерном случае.** Приведём геометрическое объяснение того факта, что у гармонической функции не может быть строгих внутренних максимумов. Гармоническая функция минимизирует интеграл Дирихле

$$\int_D (\nabla u)^2 dx.$$

Если бы имелся строгий внутренний максимум, график в его окрестности имел бы вид колокола (см. рис. 8.11). Срезав горб горизонтальной плоскостью, мы получили бы функцию с меньшим интегралом Дирихле, так что функция с внутренним экстремумом не может минимизировать этот интеграл. Правда, это рассуждение не охватывает функции с нестрогими максимумами, как на рис. 8.12). Всё же мы доказали, что функция, равная 0 на границе ограниченной области и минимизирующая интеграл Дирихле, тождественно равна 0 в области.

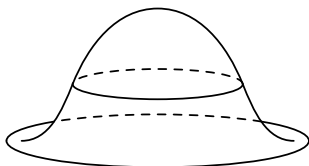


Рис. 8.11. Неминимизирующая интеграл Дирихле функция



Рис. 8.12. Нестрогий максимум

Принцип максимума в полном объёме вытекает из многомерной теоремы о среднем.

Доказательство теоремы о среднем. Рассмотрим на сфере в  $\mathbb{R}^m$  радиуса  $R$  с центром  $0$  элемент  $\Omega_{m-1}$  телесного угла, т. е. проекцию элемента площади на сферу с тем же центром радиуса  $1$  (см. рис. 8.13). Положим

$$f(R) = \int_{|x|=R} u(x) \Omega_{m-1}.$$

Тогда

$$f'(R) = \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial n} \Omega_{m-1} = \int_{|x|=R} (\nabla u, n) d\Omega_{m-1}.$$

Это есть поток градиента  $u$  через сферу, поделённый на  $R^{m-1}$ . Но если функция  $u$  гармоническая, то этот поток равен  $0$ . Итак,  $f'(R) = 0$ ,  $f(R) = \text{const}$ . Если радиус  $R$  мал, то очевидно, что указанный интеграл примерно равен  $u(0)$ . Значит,  $f(R) = u(0)$ , что и требовалось.  $\square$

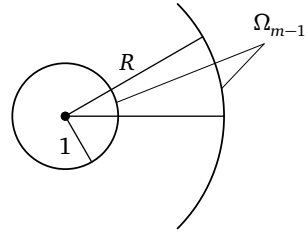


Рис. 8.13. К теореме о среднем

**Следствие.** Справедливо равенство

$$u(0) = \frac{1}{V_R} \int_{|x| \leq R} u(x) dx,$$

где  $V_R$  — объём шара радиуса  $R$ .

Действительно, чтобы проинтегрировать по шару, можно интегрировать по сфере фиксированного радиуса, а потом по радиусу.

**Следствие.** Для гармонической функции в  $n$ -мерном случае верен принцип максимума.

**Следствие.** Решение задачи Дирихле в  $n$ -мерном случае единственно.

**Замечания.** 1. При выводе формулы Пуассона мы не проверяли сходимости до границы. Конечно, наши рассуждения показывают, что если существует формула для решения задачи Дирихле, то она должна иметь вид

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \beta)} f(\beta) d\beta. \quad (2)$$

Надо всё же аккуратно проверить, что для всякой непрерывной функции  $f$  функция  $u$ , определённая формулой (2), действительно

решает задачу Дирихле. Попробуйте сделать нужные оценки самостоятельно. (Если это вызовет затруднения, соответствующие расхождения можно найти в учебнике А. Картана [7, с. 168–170].)

2. Разумеется, второй вывод формулы Пуассона (для полуплоскости) имеет тот же недочёт, что и первый, — мы объясняем, как написать ядро Пуассона, но не проверяем, что полученное решение годится для любой непрерывной функции на границе.

3. При втором выводе формулы Пуассона мы сначала решаем задачу Дирихле для очень простых, но всё же разрывных начальных данных. Найденные нами решения (связанные с функцией «угол») ограничены. Только для ограниченных решений можно гарантировать единственность решения задачи Дирихле с разрывными граничными данными, но этой теоремы мы не формулировали и не доказывали. Всё это подчёркивает эвристичность нашего вывода формулы Пуассона.

4. Вот пример неединственности решения задачи Дирихле для разрывных начальных данных. Рассмотрим задачу Дирихле в полуплоскости  $y \geq 0$  с начальным условием  $u(x, 0) \equiv 0$ . Допускаются решения, разрывные в точке  $\infty$ . Рассмотрим любую целую функцию  $f(r)$ , вещественную на вещественной оси (например,  $f(z) = z$  или  $f(z) = \exp(z)$  и т. п.). Тогда функция  $u = \operatorname{Im} f(z)$  даёт решения нашей задачи. Отметим, что все эти решения, за исключением  $u \equiv 0$ , неограничены. Докажите это, используя теорию аналитических функций.

Докажите и более общий факт: две ограниченные функции, имеющие конечное число точек разрыва в замкнутом круге, гармоничные внутри круга и совпадающие на границе, тождественно совпадают в точках непрерывности.

ЛИТЕРАТУРА К ЛЕКЦИИ 8: [7].

## Лекция 9

# Фундаментальное решение оператора Лапласа. Потенциалы

Взаимодействие математики и физики идёт подчас странными путями. Дирак, один из крупнейших физиков XX века, так сформулировал стратегию теоретической физики: «Приступая к созданию физической теории, необходимо отбросить все предшествующие физические модели, а также основанную на них „физическую интуицию“, которая есть не что иное, как набор предвзятых точек зрения». Надо, говорит Дирак, просто выбрать красивую математическую теорию и последовательно находить физические интерпретации её следствиям, не боясь противоречия с предшествующими теориями<sup>1</sup>.

Как это ни удивительно, весь опыт теоретической физики XX века (в отличие от физики XIX века) подтверждает правоту Дирака. Замечено, что каждая новая физическая теория опровергает все предшествующие. А математические модели сохраняются.

Но сегодня мы займёмся математической теорией, которая, наоборот, долго не признавалась математиками, хотя физики давно ею свободно пользовались, — теорией так называемых обобщённых функций. Наиболее важным примером обобщённой функции является  $\delta$ -функция Дирака. Мы рассмотрим её сначала на прямой, затем в  $\mathbb{R}^n$ ; её можно было бы определить на любом многообразии. Это математический аналог таких физических понятий, как точечный заряд и материальная точка.

Физическое «определение», против которого восстают ортодоксальные математики, такое:  $\delta$ -функция равна 0 всюду, кроме нуля, в нуле равна бесконечности, а интеграл от неё по всей прямой равен 1.

---

<sup>1</sup> «I learnt to distrust all physical concepts as the basis for a theory. Instead one should put one's trust in a mathematical scheme even if the scheme does not appear at first sight to be connected with physics. One should concentrate on getting an interesting mathematics».

Физики прекрасно умеют работать с такими определениями, математически явно бессмысленными.

Мы примем следующее определение, которое просто в применении, позволяет легко выяснять физический смысл и не такое нудное, как в «правильной математической теории обобщённых функций».

Наша  $\delta$ -функция переменной  $x$  обозначается  $\delta(x)$  и сосредоточена в нуле. Пусть  $\delta(x)$  фигурирует в некоторой формуле. Это значит, что надо в эту формулу вместо  $\delta(x)$  подставить  $\delta$ -образную функцию  $\delta_\varepsilon(x)$ , а затем перейти к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$\delta$ -образная функция — это обычная гладкая функция со следующими свойствами.

1. Интеграл от неё по всей прямой равен 1.
2. Она неотрицательна.
3. Она сосредоточена в интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , т. е. вне его равна нулю. (Последние два условия можно ослабить.)

Типичный вид графика  $\delta$ -образной функции показан на рис. 9.1.

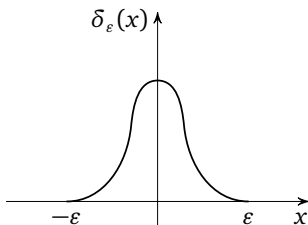


Рис. 9.1.  $\delta$ -образная функция

При переходе к пределу  $\delta$ -образную функцию можно фиксировать ( $\varepsilon$  входит в формулу как параметр), а можно и не фиксировать, лишь бы семейство функций  $\delta_\varepsilon(x)$  удовлетворяло условиям 1–3.

## 1. Примеры и свойства

1. Справедливо равенство

$$\int \delta(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

2. Если  $x \neq 0$ , то  $\delta(x) = 0$ , так как  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = 0$  при  $x \neq 0$ .
3. Вычислим  $\int f(x)\delta(x) dx$ , где  $f(x)$  — непрерывная функция.



Основной вклад в интеграл  $\int f(x)\delta_\varepsilon(x) dx$  даёт выражением  $\int f(0)\delta_\varepsilon(x) dx$  (см. рис. 9.2), оно стремится к  $f(0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; разность между ним и всем интегралом тоже стремится к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (это упражнение). В итоге

$$\int f(x)\delta(x) dx = f(0).$$

4. Аналогично

$$\int f(y)\delta(x-y) dy = f(x).$$

Рассуждение то же самое, с учётом того, что  $\delta_\varepsilon(x-y)$  — сдвиг функции  $\delta_\varepsilon(x)$  из окрестности нуля в окрестность точки  $y$  (см. рис. 9.2).

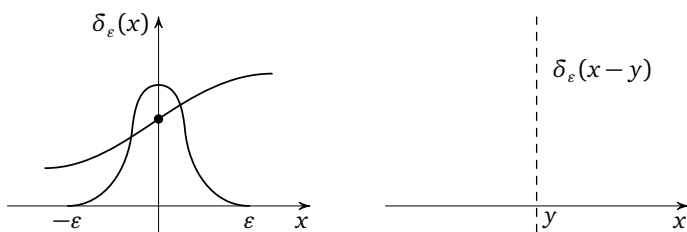


Рис. 9.2. К вычислению свёртки с  $\delta$ -функцией

Формула из примера 4 имеет ещё и следующую замечательную интерпретацию: произвольная функция  $f$  есть непрерывная линейная комбинация сдвинутых  $\delta$ -функций  $\delta(\cdot - y)$ , сосредоточенных в точках  $y$  с коэффициентами  $f(y)$ , так что  $\delta$ -функции  $\delta(\cdot - y)$  образуют «континуальный базис» в пространстве функций на прямой. Полезно также понимать  $\delta(\cdot - y)$  как плотность единичной точечной массы или заряда, сосредоточенного в точке  $y$ .

5. Однородность.

**Определение.** Функция  $f$  называется *однородной степени  $d$* , если  $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$  при любом положительном  $\lambda$ .

Выясним, однородна ли  $\delta$ -функция и какой степени. Для примера найдём  $\delta(2x)$ . Подставим  $2x$  вместо  $x$  в функцию  $\delta_\varepsilon(x)$ . Интеграл уменьшится в 2 раза. Перейдя к пределу, получим  $\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x)$ . Аналогичное рассуждение справедливо для любого множителя. Итак, функция  $\delta(x)$  однородна степени  $-1$ , так же как функция  $1/x$ . Это сходство не случайно, в некотором смысле эти функции родственные, правда, только в одномерном случае.

В  $n$ -мерном случае функция  $\delta(x)$  однородная степени  $-n$ . В этом можно убедиться ещё и так:  $\delta(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1) \dots \delta(x_n)$ , поскольку соответствующее произведение  $\delta$ -образных функций даёт  $\delta$ -образную функцию в  $n$ -мерном пространстве. Так как сомножители однородны степени  $-1$ , произведение, очевидно, однородно степени  $-n$ .

## 2. Отступление. Принцип суперпозиции

Хотя этот принцип является основой всей так называемой линейной физики, по существу это простой факт из линейной алгебры.

Рассмотрим линейный оператор  $L: V \rightarrow W$ , отображающий одно линейное пространство в другое. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение  $Lu = f$ . Уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда  $f \in \text{Im } L$ , где  $\text{Im } L$  — образ оператора  $L$  — подпространство пространства  $W$ . Решения образуют аффинное подпространство в  $V$ , параллельное  $\text{Ker } L$ , где  $\text{Ker } L$  — ядро оператора  $L$  — подпространство пространства  $V$ . А именно, пусть  $u_q$  — какое-то решение неоднородного уравнения; тогда его общее решение представляется в виде  $u = u_q + u_o$ , где  $u_o$  — общее решение однородного уравнения  $Lu = 0$  (см. рис. 9.3).

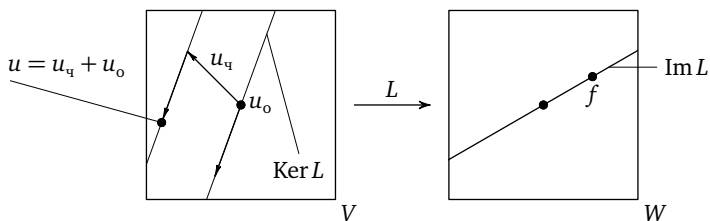


Рис. 9.3. Решения линейного неоднородного уравнения

Теперь сформулируем собственно принцип суперпозиции. Пусть  $u_1, u_2$  — решения уравнений  $Lu = f_1$ ,  $Lu = f_2$  соответственно. Тогда  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  — решение уравнения  $Lu = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ ; здесь  $\alpha_1, \alpha_2$  — произвольные постоянные.

Физически это можно понимать так: бросим в воду один камень, получим некоторую картину волн; бросим другой камень, получим другую картину волн. Бросим оба камня вместе. Тогда полученная картина волн такая же, как если бы мы сложили возмущения от бросания первого камня с возмущениями, происшедшими от бросания второго.

Доказательства всех вышеперечисленных утверждений очевидны в силу линейности оператора.

Теперь соединим принцип суперпозиции с возможностью разложения любой функции в суперпозицию  $\delta$ -функций. Получим следующее. Если мы хотим решить линейное дифференциальное уравнение, в правой части которого стоит произвольная функция  $f$ , то достаточно научиться решать это уравнение, где в правой части стоит  $\delta$ -функция, а затем применить принцип суперпозиции. Только вместо сумм придётся писать интегралы.

Применим эти соображения к уравнению Пуассона  $\Delta u = f$ . Сначала надо решить уравнение  $\Delta u = \delta(x)$ . Конечно, решение этого уравнения не единственно. Действительно, ядро оператора  $\Delta$  состоит из гармонических функций, так что к решению можно добавлять произвольную гармоническую функцию.

Из всех решений уравнения  $\Delta u = \delta(x)$  можно выделить одно замечательное, называемое *фундаментальным*. Покажем, как это можно сделать.

Оператор Лапласа инвариантен относительно евклидовой группы движений (вращений и сдвигов). Действительно, лапласиан — это дивергенция градиента, а значит, он определяется только евклидовой структурой. С другой стороны,  $\delta$ -функция также сферически симметрична. Поэтому при повороте вокруг начала координат из решения уравнения  $\Delta u = \delta$  получится снова решение этого уравнения. Среднее арифметическое двух решений тоже является решением. Вообще решением является любая линейная комбинация нескольких решений, у которых сумма коэффициентов равна единице. Поэтому можно провести усреднение решения по группе всех вращений вокруг начала координат, которая является компактной.

Например, при  $n = 2$  группа  $SO(2)$  поворотов плоскости изоморфна окружности  $S^1$ , усредняющая мера равна  $\frac{1}{2\pi} d\varphi$ .

При  $n = 3$  группа вращений  $SO(3)$  изоморфна вещественному трёхмерному проективному пространству  $\mathbb{RP}^3$ . Она двулистно покрывается трёхмерной сферой (группой единичных кватернионов), которая в свою очередь изоморфна специальной унитарной группе  $SU(2)$ , называемой также спиновой группой порядка 3, см. ниже диаграмму:

$$\begin{array}{c} S^3 \cong SU(2) = \text{Spin } 3 \\ \downarrow 2 \\ SO(3) \cong \mathbb{RP}^3. \end{array}$$

Метрику на  $SO(3)$  можно, в частности, перенести с  $S^3$  при двулистном накрытии. Метрика эта инвариантна относительно вращений, а значит, есть и мера, по которой можно провести усреднение.

После усреднения получим решение, инвариантное относительно вращений. Иными словами, значение решения  $u(x)$  зависит лишь от расстояния от точки  $x$  до начала координат. Для таких функций оператор  $\Delta$  превращается в обыкновенный линейный дифференциальный оператор второго порядка. Поэтому уравнение для  $u$  имеет при  $r > 0$  вид

$$u'' + A(r)u' + B(r)u = 0$$

(здесь в правой части стоит 0, поскольку  $\delta$ -функция обращается в 0 при  $r > 0$ ).

Коэффициенты  $A, B$  можно вычислить явно, не поленившись перейти в операторе Лапласа к полярным координатам, но можно обойтись и без вычислений. Во-первых, мы знаем очевидное решение  $u \equiv 1$ . Поэтому  $B \equiv 0$ . Значит, оператор имеет вид  $u'' + A(r)u'$ .

Теперь применим соображения однородности. Оператор Лапласа переводит однородные функции в однородные, причём степень понижается на 2. Так как функция  $\delta(x)$  однородная степени  $-n$ , однородное решение  $u$  уравнения  $\Delta u = \delta$  должно быть однородным степени  $2 - n$ . Следовательно, такое решение пропорционально  $1/r^{n-2}$ , в частности, при  $n = 3$  оно пропорционально  $1/r$ . (Заметим, что при  $n = 2$  эта формула не работает — однородного непостоянного решения в этом случае не существует.)

Вычислим оператор Лапласа:

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = \operatorname{div} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right).$$

Градиент нашей однородной функции есть векторное поле, направленное к центру по радиусам, его длина равна модулю производной по  $r$ :

$$(r^{n-2})' = (2-n)r^{1-n} = \frac{2-n}{r^{n-1}}.$$

(Для проверки: при  $n = 3$  градиент потенциала  $1/r$  есть ньютонова сила, обратно пропорциональная  $r^2$ .)

Для вычисления дивергенции заметим, что она инвариантна относительно вращений. Вычислим поток найденного градиентного поля через две концентрические сферы (см. рис. 9.4).

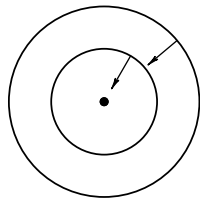


Рис. 9.4. Вычисление  $\operatorname{div} \operatorname{grad} r^{2-n}$

Поток через сферу равен величине поля, умноженной на поверхность сферы, а поверхность сферы радиуса  $R$  равна  $\omega_{n-1}R^{n-1}$ , где  $\omega_{n-1}$  — поверхность сферы единичного радиуса ( $4\pi$  при  $n = 3$ ,  $2\pi$  при  $n = 2$ ). В итоге поток равен  $(2 - n)\omega_{n-1}$ , в частности, при  $n = 3$  это  $-4\pi$ .

Наше поле, таким образом, обладает замечательным свойством «несжимаемости»: его поток через любую сферу с центром в нуде одинаков. Этим условием сферически симметричное поле определяется однозначно (с точностью до умножения на постоянную). Например, в трёхмерном пространстве таким свойством несжимаемости обладает только ньютоново поле. На плоскости тоже существует  $OO(2)$ -инвариантное несжимаемое поле: длина вектора поля обратно пропорциональна первой степени расстояния до центра. Это поле градиентное, но его потенциал — не однородная функция, а  $\ln(1/r)$ . Мы приходим к удивительной формуле  $1/r^0 \sim \ln(1/r)$ .

**Замечание 1.** Эту формулу, а с ней и фундаментальное решение уравнения  $\Delta u = \delta$  на плоскости, можно было бы угадать, рассматривая размерность плоскости  $n = 2$  как предел размерностей  $n = 2 + \varepsilon$ :

$$\frac{1}{r^{n-2}} = \frac{1}{r^\varepsilon} = \exp\left(\varepsilon \ln \frac{1}{r}\right) = 1 + \varepsilon \ln \frac{1}{r} + O(\varepsilon^2).$$

Вернёмся к вычислению дивергенции. Суммарный поток поля через границу слоя между концентрическими сферами нулевой. Но этот поток есть интеграл от дивергенции по слою. Итак,

$$\int_{r_1}^{r_2} r^{n-1} \operatorname{div} \operatorname{grad}(r^{2-n}) dr = 0$$

при любых  $r_1, r_2$ , а значит, и сама дивергенция равна 0. Окончательно получаем

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = \operatorname{div} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = 0$$

при  $r > 0$ . А тогда можно найти и коэффициент  $A(r)$  — вот мы и избежали длинной замены переменных.

**Утверждение.** Во всём пространстве  $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) \neq 0$ .

Действительно, рассмотрим поток поля градиента через сферу с центром 0. Он равен  $(2 - n)\omega_{n-1}$ . Более того, сферу можно заменить границей произвольной области. Если эта область содержит 0, то интеграл по этой области от дивергенции поля равен  $(2 - n)\omega_{n-1}$ , а если

не содержит, то интеграл равен нулю. Но это означает по самому определению  $\delta$ -функции, что дивергенция поля равна  $(2-n)\omega_{n-1}\delta(x)$ . Например, при  $n = 3$  имеем  $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(x)$  и т. д.

Конечно, этот результат можно проверить и при помощи  $\delta$ -образных функций. Но мы видим, насколько всё становится проще, если работать прямо с идеальным предельным объектом — с самой  $\delta$ -функцией.

При  $n = 2$  в качестве фундаментального решения (потенциала) подходит функция  $\ln(1/r)$ . Действительно, производная по  $r$  от неё равна  $-(1/r)$ , а дальше проходят все наши рассуждения.

Заметим, что на уровне полей результат общий во всех размерностях: поле обратно пропорционально  $r^{n-1}$ . Случай  $n = 1$  тоже включается в общую картину: фундаментальным решением оператора  $d^2/dx^2$  является функция  $|tx|$  с подходящим  $t$ , а поле по абсолютной величине пропорционально  $1/r^{1-1}$ , т. е. постоянно (см. рис. 9.5).

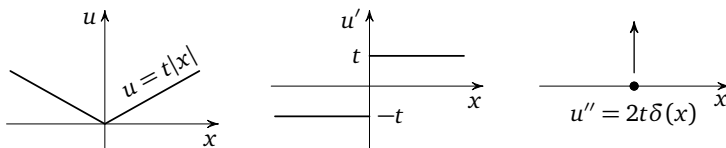


Рис. 9.5. Фундаментальное решение оператора Лапласа при  $n = 1$

Мы видим, что  $t = 1/2$ , так что фундаментальное решение есть  $|x|/2$ . Интересно, что случай  $n = 1$  укладывается в общую картину и на уровне коэффициентов. А именно, общая формула для фундаментального решения

$$u_0 = \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}r^{n-2}}$$

при  $n = 1$  принимает вид

$$\frac{r}{\omega_0} = \frac{r}{2}.$$

Действительно, поверхность  $\omega_0$  (нульмерный объём) нульмерной сферы  $S^0$ , состоящей из двух точек, равна 2.

Итак, общая формула для фундаментального решения верна во всех размерностях, кроме 2, где возникает логарифм:

$$u_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}.$$

**Замечание 2.** Появление здесь логарифма имеет свои глубокие причины: логарифм относится к так называемым присоединённым однородным функциям. Логарифм присоединяется к степенным функциям совершенно таким же образом, как присоединённые векторы присоединяются к собственным в теории жордановых клеток. Вы уже сталкивались с этим явлением в теории резонансов при решении линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами: когда собственные числа становятся кратными, к экспонентам присоединяются квазимногочлены.

Физический смысл фундаментального решения — потенциал единичного точечного заряда в точке 0. Градиент этого потенциала есть поле, созданное этим зарядом.

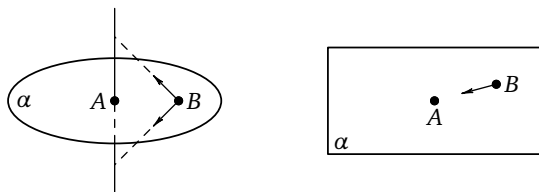
Физически интересно рассматривать поля при  $n = 3$ . Но и поля в меньших размерностях можно получить из трёхмерных картин, обладающих подходящей симметрией.

Рассмотрим, например, равномерно заряженную прямую в  $\mathbb{R}^3$ . Найдём силу, созданную этим зарядом в данной точке, как равнодействующую сил точечных зарядов, размазанных по прямой. Результат будет такой же, как при рассмотрении плоскости, проходящей через нашу точку перпендикулярно заряженной прямой, причём весь заряд прямой надо поместить в 0 (см. рис. 9.6).

**Предостережение.** Складывать нужно именно силы, а не потенциалы, так как соответствующий интеграл для потенциалов расходится. Мы получаем ещё одну замечательную и удивительную формулу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} \sim 2 \ln \frac{1}{r} + \text{const}$$

(чему равна константа, спрашивать запрещается!).



**Рис. 9.6.** Прямая создаёт в каждой ортогональной плоскости такое же поле зарядов, какое точечный заряд создаёт на плоскости

Аналогично если заряд равномерно распределён на плоскости, то на каждой ортогональной прямой получим такую же картину сил, какую создаёт точечный заряд при  $n = 1$ .

Аналогичный спуск можно проводить начиная с любой размерности.

Теперь рассмотрим непрерывную функцию  $f(x)$ , заданную в ограниченной области  $\Omega$ . Решение  $u$  уравнения Пуассона  $\Delta u = f$  можно найти по принципу суперпозиции, представляя  $f$  в виде суперпозиции сдвигов  $\delta$ -функции. Пусть  $u_0$  — фундаментальное решение, т. е.  $\Delta u_0(x) = \delta(x)$ . Иными словами,  $u_0(x)$  — потенциал, созданный в точке  $x$  единичным зарядом, помещённым в нуле. Если заряд величины  $f(y)$  находится в точке  $y$ , то в точке  $x$  он создаст потенциал  $f(y)u_0(x - y)$ .

Суперпозиция всех этих полей — поле с потенциалом, заданным формулой

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)u_0(x - y) dy.$$

Эта функция называется интегралом Пуассона. По принципу суперпозиции

$$\Delta u(x) = \int_{\Omega} f(y)\delta(x - y) dy = f(x).$$

Поэтому  $u(x)$  — решение уравнения Пуассона.

**Теорема.** Пусть непрерывная функция  $f(x)$  сосредоточена в ограниченной области  $\Omega$ . Тогда существует решение уравнения Пуассона  $\Delta u = f$ , которое даётся формулой

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)u_0(x - y) dy,$$

где  $u_0$  — фундаментальное решение оператора Лапласа.

Когда явная формула для решения написана, выполнение уравнения можно проверить непосредственно, не прибегая к  $\delta$ -функциям.

**Упражнение.** Докажите теорему непосредственно.

Решение не единственно, к нему можно добавить любую гармоническую функцию. Единственное решение можно выделить, наложив условие на бесконечности.

При  $n > 2$  фундаментальное решение на бесконечности обращается в 0, а значит, обращается в 0 и весь интеграл Пуассона. Этим усло-



вием решение выделяется однозначно. Действительно, разность двух таких решений была бы гармонической функцией, обращающейся в нуль на бесконечности. По принципу максимума она тождественно равна нулю.

При  $n = 2$  единственное с точностью до аддитивной постоянной решение выделяется условием  $|u(x)| \leq C \ln |x|$ .

Теперь рассмотрим заряды, сосредоточенные только на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Обозначим поверхностную плотность зарядов в точке  $y$  границы через  $f(y)$ . Положим

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) u_0(x - y) dy.$$

Эта функция гармонична всюду вне границы области  $\Omega$  и обращается в 0 на бесконечности (при  $n = 2$  функция  $|u|$  на бесконечности растёт не быстрее логарифма).

Что происходит в точках самой границы? Рассмотрим элемент  $dS$  границы. Построим вдоль нормали цилиндр над  $dS$  с малой высотой  $\varepsilon$  (см. рис. 9.7).

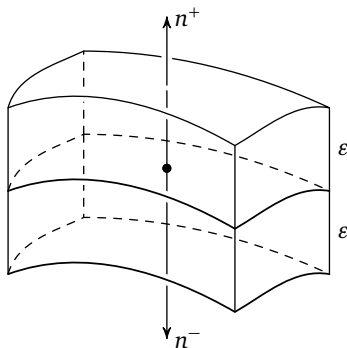


Рис. 9.7. Поле, созданное простым слоем

Рассмотрим поток градиента функции  $u$  через границу построенной области  $G$ . Естественно ожидать, что поток через боковую поверхность мал вместе с  $\varepsilon$ , так как эта боковая поверхность имеет малую площадь (оставим это пока без доказательства). Вычислим сначала суммарный поток:

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial G} (n, \nabla u) d\sigma = \int_G \Delta u dx = \int_{(\partial\Omega) \cap G} f dS$$

(второе равенство верно на основании формулы Стокса, а в третьем учитываются заряды, попавшие в  $G$ ). С другой стороны, поток через основания равен

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n_+} + \frac{\partial u}{\partial n_-} \right) dS$$

с точностью до малой по сравнению с  $dS$  поправки. Пренебрегая малым при малых  $\varepsilon$  потоком через боковую поверхность, мы приходим к выводу, что в каждой точке  $\partial\Omega$  имеет место равенство

$$\frac{\partial u}{\partial n_+} + \frac{\partial u}{\partial n_-} = f.$$

Сумма в левой части — скачок нормальной производной, если считать, что нормаль ориентирована в одну сторону. Итак, *функция  $u(x)$  является гармонической внутри и вне поверхности, а скачок её нормальной производной равен плотности распределённого по поверхности заряда*. Эта функция называется *потенциалом простого слоя* — заряды распределены по поверхности в один слой.

**Пример 1.** Вычислим потенциал сферы с постоянной плотностью заряда. С точностью до множителя получим

$$u(x) = \int_{|y|=R} \frac{dy}{|x-y|}$$

(см. рис. 9.8). Взять этот интеграл явным интегрированием на сфере можно, но не очень просто (Ньютон с этим справился).

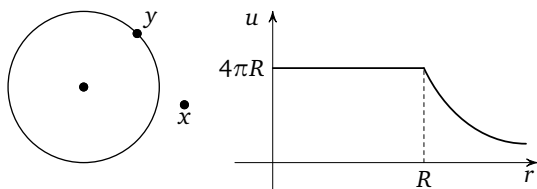


Рис. 9.8. Потенциал равномерно заряженной сферы

Но можно найти ответ и без интегрирования, используя симметрию сферы. Мы заранее знаем, что  $u = u(r)$  — гармоническая функция внутри и вне сферы. Значит, можно искать решение в виде  $a + b/r$  (константы могут быть разными внутри и вне области). Внутри сферы  $b = 0$ , иначе нарушится гармоничность в нуле. Значит, внутри сферы  $u$  постоянна и, в частности, равна своему значению в центре —  $4\pi R$ . Силовое поле внутри шара равно 0.

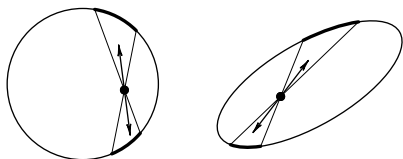


Рис. 9.9. Тяготение внутри сферы и эллипсоида отсутствует

Кстати, Ньютон обнаружил это путём уравнивания сил (см. рис. 9.9), его рассуждение верно также для эллипсоида, точнее, для бесконечно тонкого однородного слоя между гомотетичными эллипсоидами с общим центром, где соображения симметрии (зависимость потенциала только от радиуса) не проходят.

**Задача.** Докажите, что силы притяжения противоположными элементами слоя между concentрическими гомотетичными эллипсоидами противоположны.

Вернёмся к нашей сфере и найдём константы  $a$  и  $b$  для внешней области. Снаружи  $a = 0$  (потенциал на бесконечности нулевой). Коэффициент  $b$  представляет собой суммарный заряд и равен  $4\pi R$ . Можно также найти  $a$  из соображений непрерывности функции  $u$  в точках самой сферы при подходе изнутри и снаружи, поскольку интеграл равномерно сходится. График потенциала дан на рис. 9.8.

**Пример 2.** Пусть  $A$  — симметрический оператор в евклидовом пространстве,  $I$  — тождественный оператор. Оператор  $A - \lambda I$  определяет однопараметрическое семейство квадратичных форм  $((A - \lambda I)x, x)$ , называемое евклидовым пучком. Оператор  $(A - \lambda I)^{-1}$  (резольвента) тоже симметрический и определяет нелинейный пучок квадратичных форм  $((A - \lambda I)^{-1}x, x)$  (двойственный евклидову в смысле проективной двойственности). Рассмотрим семейство квадратик

$$((A - \lambda I)^{-1}x, x) = 1.$$

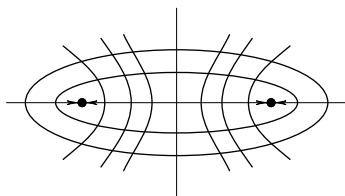


Рис. 9.10. Кривые пучка при  $n = 2$

Например, при  $n = 2$  пучок имеет такой вид, как показано на рис. 9.10, все кривые здесь имеют одни и те же фокусы.

Уравнения квадрат пучка можно записать в собственном базисе оператора  $A$  в виде

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1,$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — собственные числа оператора  $A$ . Квадрики, соответствующие различным значениям  $\lambda$ , называются *конфокальными друг другу*.

**Задача.** Докажите, что через каждую точку  $n$ -мерного пространства проходят ровно  $n$  конфокальных друг другу квадрат пучка (соответствующих некоторым значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ). Эти квадратики в каждой точке их пересечения попарно ортогональны.

Значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  называются *эллиптическими координатами* точки.

В случае  $n = 3$  через каждую точку пространства проходят эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид (см. рис. 9.11).

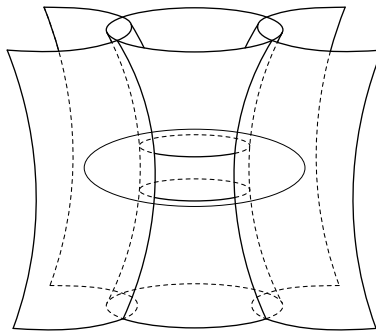


Рис. 9.11. Поверхности пучка при  $n = 3$

**Задача.** Рассмотрим какой-нибудь эллипсоид и бесконечно близкий концентрический гомотетичный эллипсоид. Рассмотрим потенциал, созданный равномерным распределением зарядов в слое между этими двумя эллипсоидами. Такой потенциал задаётся плотностью

$$\frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{df},$$

т. е.  $ds/|\nabla f|$ , где  $ds$  — евклидова площадь, а  $f$  — квадратичная форма, задающая эллипсоид. Она называется *гомеоидной* плотностью. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Электростатическое поле внутри эллипсоида равно нулю.
2. Снаружи силовые линии (фазовые линии векторного поля градиента потенциала) являются координатными линиями вышеописанных эллиптических координат.
3. Все поверхности уровня потенциала во внешней области являются эллипсоидами, конфокальными друг другу.

Напомним некоторые простые положения электростатики.

*Потенциал установившегося распределения зарядов проводящей поверхности постоянен на ней.* Действительно, если бы потенциал был не постоянен, то градиент потенциала (т. е. электростатическое поле) имел бы направленную вдоль поверхности компоненту, которая заставила бы заряды двигаться.

Определённое выше гомеоидное распределение — это распределение заряда на поверхности проводящего («металлического») заряженного эллипсоида.

Интересно, что плотность распределения заряда на проводящей поверхности больше там, где больше кривизна поверхности. Внутри же проводника не может быть зарядов установившегося распределения. Действительно, градиент потенциала установившегося распределения зарядов равен нулю внутри проводника (иначе заряды начали бы двигаться). Значит, потенциал внутри проводника — константа, и, следовательно, плотность зарядов там нулевая.

Точно так же потенциал гладкой проводящей поверхности, ограничивающей некоторую ограниченную область, постоянен в этой области, если нет зарядов.

Действительно, потенциал является гармоническим внутри поверхности и постоянным на поверхности. Следовательно, по принципу максимума он постоянен и внутри области.

Простору говоря, электростатическое поле не может проникнуть внутрь металлической полости («экранирование»). Аналогичные факты верны и в  $\mathbb{R}^n$  при любом  $n$ .

**Задача 1.** В точку на расстоянии  $r$  от центра незаряженной проводящей окружности радиуса  $R$  в  $\mathbb{R}^2$  помещён единичный заряд. Найдите образовавшееся электростатическое поле, его эквипотенциальные кривые и силовые линии.

У к а з а н и е. Начните со случая  $r = 0$ .

**Задача 2.** Проведите вычисления плотности равновесного распределения зарядов для «заряженного» проводящего эллипса или квадрата в двумерной задаче; какова особенность распределения заряда у вершин?

### 3. Добавление. Оценка потенциала простого слоя

Докажем, что электростатическое поле, созданное гладким распределением зарядов простого слоя на гладкой ограниченной поверхности, ограничено вплоть до границы.

Отсюда, в частности, следует, что поток через боковую поверхность цилиндра малой высоты  $\varepsilon$  (в построениях на с. 104) мал вместе с  $\varepsilon$ , чем мы пользовались при доказательстве формулы скачка нормальной производной потенциала простого слоя.

Рассмотрим семейство нормалей к поверхности слоя. Достаточно малая окрестность этой поверхности расслоена на отрезки нормалей. Достаточно доказать, что сила равномерно ограничена внутри такой  $r$ -окрестности (так как вне её сила ограничена величиной  $\rho S/r^2$ , где  $\rho$  — максимальная плотность заряда, а  $S$  — площадь поверхности). Рассмотрим отрезок нормали, проведённый через точку  $P$  на поверхности. Введём в окрестности точки  $P$  декартовы координаты с началом в  $P$ :  $z$  по нормали к поверхности,  $\vec{x}$  в касательной плоскости. Если радиус  $r$  окрестности точки  $P$  достаточно мал, то уравнение поверхности слоя в наших координатах записывается в виде  $z = h(\vec{x})$ ,  $|h(\vec{x})| \leq C|\vec{x}|^2$ .

Для доказательства ограниченности силы достаточно равномерно оценить только силу, созданную зарядами, находящимися в построенном шаре радиуса  $r$  (сила, созданная остальными зарядами, скажем, в  $\frac{r}{2}$ -окрестности точки  $P$  не превосходит  $4\rho S/r^2$ ).

Настоящую трудность вызывает оценка силы, созданной вблизи точки  $P$  зарядами из окрестности. Здесь ограниченность получается лишь за счёт того, что противоположные части окрестности тянут в разные стороны.

Рассмотрим вначале частный случай, когда слой в нашем шаре — горизонтальная плоскость ( $z = 0$ ) и плотность распределения зарядов постоянна.

В этом случае горизонтальные составляющие сил, созданных на оси  $z$  зарядами в противоположных точках  $\vec{x}$ , точно уравновешивают

друг друга. Результирующая сила вертикальна и даётся в точке  $Z$  интегралом (при плотности зарядов равной единице):

$$F = \int_0^r \frac{Z2\pi x dx}{(x^2 + Z^2)^{3/2}} = 2\pi \int_0^{r/Z} \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} = 2\pi \left(1 - \frac{Z}{\sqrt{r^2 + Z^2}}\right)$$

(для простоты  $Z$  считается положительным, при изменении знака  $Z$  сила меняет знак), где  $x = |\vec{x}|$ .

Во всяком случае сила ограничена величиной  $2\pi$  (соответствующей, как мы уже знаем, полю равномерно заряженной плоскости).

Теперь заменим распределение зарядов вдоль поверхности  $z = h(\vec{x})$  с плотностью  $\rho(\vec{x})$  в области  $x < r$  распределением постоянной плотности  $\rho(0)$  в круге  $x < r$  на плоскости  $Z = 0$  (здесь  $Z$  — координата точки оси  $z$ , где мы хотим оценить величину поля).

Вертикальная составляющая силы в точке  $Z$  даётся теперь интегралом от

$$\frac{(Z + h(\vec{x}))\rho(\vec{x})J(\vec{x})x dx d\varphi}{(x^2 + (Z + h)^2)^{3/2}},$$

где  $\rho$  — плотность, а  $J$  — якобиан, равный отношению элемента площади слоя над  $\vec{x}$  к элементу  $x dx d\varphi$  площади на плоскости  $\vec{x}$  (с полярными координатами  $x, \varphi$ ).

Величины  $\rho$  и  $J$  в нашей области ограничены. Кроме того, можем оценить выражение в знаменателе:

$$x^2 + (Z + h)^2 = x^2 + Z^2 + 2Zh(\vec{x}) + h^2(\vec{x}) \geq \frac{1}{2}(x^2 + Z^2)$$

при достаточно малых  $r$ , так как  $|Zh| \leq Z^2/4 + h^2$  и  $|h| \leq Cx^2$ .

Поэтому пропорциональное  $Z$  слагаемое в интеграле оценивается сверху константой так же, как в случае однородной плоскости.

Второе (пропорциональное  $h$ ) слагаемое под интегралом ограничено (числитель меньше  $C_1x^3$ , а знаменатель больше  $C_2x^3$ ). Поэтому вся вертикальная составляющая ограничена. Горизонтальная составляющая, т. е. интеграл от

$$\frac{\vec{x}\rho(\vec{x})J(\vec{x})x dx d\varphi}{(x^2 + (Z + h(\vec{x}))^2)^{3/2}},$$

оценивается сложнее.

Прежде всего можно сразу считать, что  $\rho J \equiv 1$ . Действительно, функции  $\rho$  и  $J$  гладкие, поэтому замена  $\rho(\vec{x})J(\vec{x})$  на  $\rho(0)J(0)$  меняет подынтегральное выражение на ограниченное слагаемое ( $\leq C_3x^3$  в числителе,  $\geq C_2x^3$  в знаменателе).

Остаётся сравнить интеграл при  $\rho J = 1$  с таким же интегралом с  $h = 0$  (равным, как мы уже знаем, нулю).

**Лемма.** *Имеет место неравенство*

$$\left| \frac{1}{(x^2 + Z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x^2 + (Z + h)^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{C_4}{x^2}.$$

**Доказательство.** Пусть  $Z = \lambda x$ , тогда левая часть равна

$$\frac{1}{x^3} \left| \frac{1}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + (\lambda + \mu)^2)^{3/2}} \right|,$$

где  $h = \mu x$ , так что  $|\mu| < Cx$ .

Функция  $\frac{1}{(1 + \lambda^2)^{3/2}}$  имеет ограниченную некоторой константой  $C_5$  на всей прямой производную. По формуле конечных приращений

$$\left| \frac{1}{(1 + \lambda^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1 + (\lambda + \mu)^2)^{3/2}} \right| \leq C_5 \mu.$$

Поскольку  $|\mu| \leq Cx$ , оцениваемая в лемме величина не превосходит

$$\left| \frac{C_5 \mu}{x^3} \right| \leq \frac{C_5 C}{x^2},$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Наконец, для интеграла, определяющего горизонтальную составляющую силы при  $J\rho = 1$ , мы получаем оценку

$$\left| \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{\vec{x} x \, dx \, d\varphi}{(x^2 + (Z + h(\vec{x}))^2)^{3/2}} \right| \leq 2\pi \int_0^r \frac{x^2 C_4}{x^2} \, dx = 2\pi r C_4$$

(такой же интеграл с  $h = 0$  равен нулю, а разность подынтегральных выражений при  $h = 0$  и при любом  $h$  оценена в лемме величиной  $C_4/x^2$ ).

**Замечание 3.** Подобными же элементарными оценками можно доказать и непрерывность потенциала простого слоя во всём пространстве, и существование и непрерывность пределов его производных по внутренней и внешней нормальям, а не только формулу скачка нормальной производной, которой мы тут ограничились.

**Замечание 4.** При рассмотрении потенциалов очень полезно введённое Фарадеем соглашение, что «из каждой единицы заряда выходят  $4\pi$  силовых линий электростатического поля» (что бы это ни означало). Предполагается, что линии начинаются в положительных



зарядах (или на бесконечности), а заканчиваются в отрицательных (или на бесконечности).

В этом случае напряжённость поля оказывается равной «плотности силовых линий». Например, для зарядов простого слоя половина из  $\rho 4\pi dS$  силовых линий, выходящих из зарядов области  $dS$ , идут в одну, а половина — в другую сторону, откуда и получается формула скачка. Множитель  $4\pi$  появляется тут из-за того, что в физике речь идёт о потенциале единичного заряда вида  $u = 1/r$ , а мы определяли потенциал простого слоя как интеграл от сдвигов фундаментального решения  $\Delta u = \delta$ .

ЛИТЕРАТУРА К ЛЕКЦИИ 9: [12].

## Лекция 10

### Потенциал двойного слоя

Итак, мы нашли фундаментальное решение оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$ :

если  $n > 2$ , то  $u_0 = \frac{1}{-(n-2)\omega_{n-1}r^{n-2}}$ , где  $\omega_{n-1}$  — поверхность единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ ;

если  $n = 2$ , то  $u_0 = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ ;

если  $n = 1$ , то  $u_0 = |x|/2$ .

Между прочим, знаки определяются условием  $\Delta u_0 = \delta$  так: при сглаживании особенности вблизи нуля у сглаженной функции должна получиться *положительная* вторая производная. Коэффициент определяется из условия, что поток градиента функции  $u$  через единичную сферу должен быть равен 1.

При помощи фундаментальных решений мы построили потенциалы: объёмный, дающий решение уравнения Пуассона, а также простого слоя. Теперь займёмся потенциалом двойного слоя.

Рассмотрим на гиперповерхности распределение зарядов в два слоя (один слой положительный, другой — отрицательный) с некоторой плотностью  $\rho(x)$ , где  $\rho$  — функция на гиперповерхности (см. рис. 10.1).

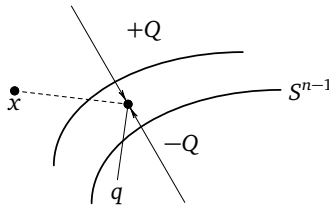


Рис. 10.1. Двойной слой на гиперповерхности

Здесь имеется в виду следующий предельный переход. Пусть  $l$  — расстояние между зарядами по нормали, проведённой к гиперповерхности в точке  $q$ ; заряды  $+Q = \rho/l$  и  $-Q = -\rho/l$  имеют величину порядка  $1/l$ ; они создают некоторое поле. Мы вычисляем предел поля при

$l \rightarrow 0$ . Этот предел называется *полем диполя*, а его потенциал — *потенциалом диполя* или *дипольным потенциалом*. При переходе к пределу *дипольный момент*  $\rho = Ql$  сохраняется. Направление, соединяющее бесконечно близкие заряды, составляющие диполь, называется *осью диполя*. Потенциал двойного слоя плотности  $\rho$ , распределённого на гиперповерхности, есть интеграл от дипольных потенциалов зарядов, расположенных на гиперповерхности, оси которых — нормали к гиперповерхности, причём дипольный момент в бесконечно малой области  $ds$  на гиперповерхности есть  $\rho ds$ .

Вычислим потенциал диполя в терминах фундаментального решения  $u_0$ :

$$u_0\left(x - \left(q + n_q \frac{l}{2}\right)\right) \frac{\rho}{l} - u_0\left(x - \left(q - n_q \frac{l}{2}\right)\right) \frac{\rho}{l} = \rho \frac{\partial u_0(x-q)}{\partial n_q} + o(1)$$

при  $l \rightarrow 0$ . Здесь  $n_q$  — внешняя нормаль к гиперповерхности в точке  $q$ .

Мы нашли элемент потенциала двойного слоя, созданный диполем, расположенным в точке  $q$ , а в целом потенциал двойного слоя в точке  $x$  равен

$$u(x) = \int_{S^{n-1}} \rho(q) \frac{\partial u_0(x-q)}{\partial n_q} dq.$$

## Свойства потенциала двойного слоя

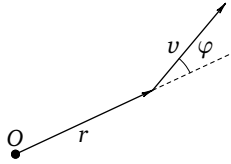
1. Вместо нормированного условием  $\Delta u_0 = \delta$  фундаментального решения обычно используются функции  $u_0 = 1/r^{n-2}$  при  $n > 2$  и  $u_0 = \ln(1/r)$  при  $n = 2$ . Потенциал двойного слоя — гармоническая функция во внутренней и во внешней области, ограниченной поверхностью, поскольку это было верно до предельного перехода;

$$\Delta u|_{\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}} = 0.$$

Внутренних областей может даже быть несколько, если поверхность не связна.

**Пример.** Пусть  $n = 2$ ,  $\rho \equiv 1$  на связной замкнутой кривой. Тогда  $u(x) \equiv \text{const}$ , причём константы разные вне кривой, внутри и на кривой.

Сейчас мы докажем этот удивительный факт. Вначале вычислим потенциал диполя. Центр диполя можно считать началом координат.

Рис. 10.2. Производная радиус-вектора по вектору  $v$ 

Производная фундаментального решения по направлению любого вектора  $\vec{v}$  есть

$$L_v \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} L_v r = -\frac{|\vec{v}| \cos \varphi}{r}.$$

Действительно,  $L_v r$  легко вычисляется для любой размерности:

$$L_v \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \frac{2(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{(\vec{v}, \vec{r})}{r} = v \cos \varphi$$

(см. рис. 10.2).

Производная фундаментального решения при любом  $n > 2$  вычисляется аналогично:

$$L_v \frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{(2-n)(\vec{r}, \vec{v})}{r^n}.$$

Заметим, что на бесконечности потенциал отдельного заряда убывает как  $1/r^{n-2}$ , а потенциал диполя — быстрее, как  $1/r^{n-1}$ . (Говорят, что положительный и отрицательный заряды «экранируют» друг друга.)

Нарисуем линии уровня потенциала диполя (для  $n = 2$ ). Если направить ось  $x$  вдоль вектора  $\vec{v}$ , то получим функцию

$$\frac{x}{r^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Это очень важная гармоническая на плоскости без нуля функция. Она имеет особенность в нуле. Её линии уровня — конические сечения, заданные уравнениями  $x^2 + y^2 = cx$ . Они образуют семейство окружностей, проходящих через начало координат и касающихся там друг друга. Эти окружности перпендикулярны оси диполя в его центре (см. рис. 10.3).

**Задача.** Нарисуйте линии уровня потенциала пары разноимённых зарядов одинаковой величины на плоскости.

**У к а з а н и е.** Разность логарифмов двух чисел равна логарифму отношения этих чисел. Геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (см. рис. 10.4),

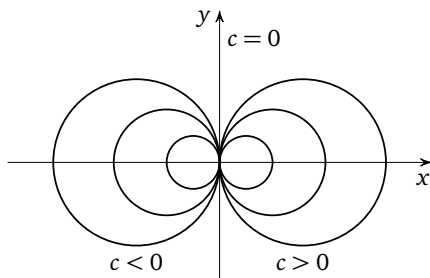


Рис. 10.3. Линии уровня потенциала диполя

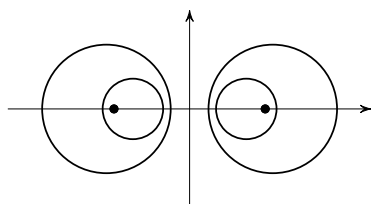
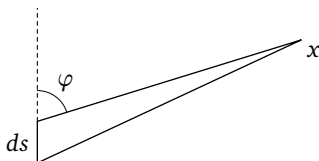


Рис. 10.4. Линии уровня потенциала пары противоположных зарядов

есть окружность (почему?). При слиянии зарядов ( $l \rightarrow 0$ ) система окружностей (рис. 10.4) переходит в систему окружностей (рис. 10.3) с общей касательной в центре диполя.

В нашей системе координат линия уровня потенциала диполя — окружность — касается оси  $y$ . Если кривая, в точках которой мы исследуем потенциал диполя, перпендикулярна оси диполя и имеет в его центре конечную кривизну, то она имеет касание второго порядка со своей соприкасающейся окружностью, входящей в наше семейство линий уровня потенциала диполя. Поэтому предельное значение потенциала диполя при стремлении точки к центру диполя вдоль этой кривой, проходящей через центр диполя, вполне определено и равно значению потенциала диполя на соприкасающейся окружности, т. е. равно половине кривизны кривой.

**Следствие.** *Подынтегральная функция интеграла, определяющего потенциал двойного слоя, ограниченная на тор  $\{x \in S, q \in S\}$ , продолжается по непрерывности даже на диагональ  $x = q$  (где подынтегральная функция не определена).*



**Рис. 10.5.** Угол, под которым виден элемент кривой, — гармоническая функция

Рассмотрим элемент кривой и угол, под которым он виден в данной точке  $x$ . Получится функция, гармоническая по  $x$  во всех точках, кроме точек этого элемента кривой (см. рис. 10.5).

Действительно, этот угол равен

$$\frac{ds \sin \varphi}{r} = ds \frac{x}{x^2 + y^2},$$

где  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r \cos \varphi$ .

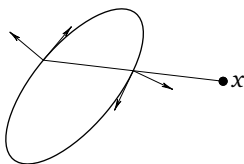
Отсюда ясен *геометрический смысл потенциала (диполя)*: это элемент угла, под которым виден из данной точки элемент кривой. Причём это справедливо в любой размерности: вклад окрестности  $ds$  гиперповерхности в интеграл, вычисляемый в данной точке  $x$ , есть элемент телесного угла, под которым элемент  $ds$  виден из точки  $x$ .

**Задача.** Докажите для любой размерности, что телесный угол, под которым виден элемент поверхности, — гармоническая функция.

**Указание.** Воспользуйтесь формулой производной фундаментального решения вдоль векторного поля.

Для  $n = 2, 3$  потенциал диполя, определяемый как производная от  $\ln(1/r)$  или  $1/r$  соответственно, в точности совпадает с элементом телесного угла; в больших размерностях  $n$  появится коэффициент  $n - 2$ , если использовать  $u_0 = 1/r^{n-2}$ . Равенство будет на самом деле с точностью до знака, зависящего от выбора ориентации гиперповерхности, по которой ведётся интегрирование элемента угла. Гиперповерхность ориентируется как граница ориентированной «внутренней» области.

Если  $\rho \equiv 1$ , то при  $n = 2$  после интегрирования элемента угла мы получаем «угол, под которым граничная кривая видна из точки  $x$ », точнее, при указанном выборе ориентации кривой потенциал равен  $-2\pi \times$  (число оборотов вектора из точки  $x$  к точке кривой при обходе всей кривой). При  $n = 3$  аналогично получим ориентированный



**Рис. 10.6.** Полный телесный угол

полный телесный угол, под которым видна поверхность из точки  $x$  (см. рис. 10.6).

Это рассуждение заменило довольно длинные вычисления. При  $n = 2$  получаем для потенциала двойного слоя плотности 1, распределённого вдоль связной замкнутой кривой, значение  $-2\pi$  во внутренней области, в наружной — значение 0, а на самой кривой —

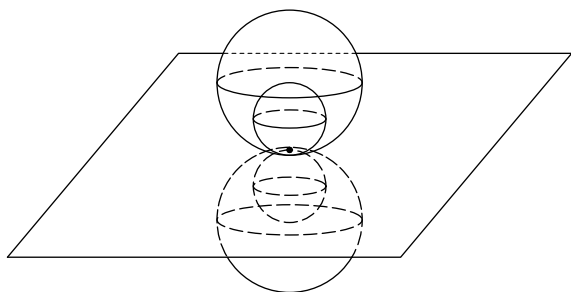
значение  $-\pi$ , если в этой точке существует касательная.

При  $n = 3$  получаем соответственно  $-4\pi$ , 0,  $-2\pi$ . Аналогично можно получить значения в любой размерности.

**Замечание.** В  $n$ -мерном случае гиперповерхности уровня потенциала диполя задаются уравнением

$$\frac{\sin \varphi}{r^{n-1}} = \text{const.}$$

Эквипотенциальные поверхности диполя имеют в его центре касательную гиперплоскость, перпендикулярную оси диполя, проходят через центр диполя, касаясь друг друга, но имеют в этой точке при  $n > 2$  уплощение (см. рис. 10.7). При чётных  $n$  эквипотенциальные поверхности аналитические, включая и центр диполя. При нечётных  $n$  эквипотенциальные поверхности имеют в центре диполя такую же особенность, как график функции  $|x|^n$  от  $n - 1$  переменной.



**Рис. 10.7.** Эквипотенциальные поверхности диполя при  $n > 2$

При  $n > 2$  кривизна каждой эквипотенциальной поверхности диполя в его центре равна нулю.

Поверхность общего положения, касающаяся эквипотенциальных поверхностей в центре диполя, будет, таким образом, иметь при  $n > 2$

общие точки со сколь угодно малыми эквипотенциальными гиперповерхностями диполя. Поэтому наш потенциал диполя на некоторых из них очень велик (по модулю). Значит, на поверхности общего положения, проходящей через центр диполя перпендикулярно его оси, потенциал элемента двойного слоя будет иметь особенность, обращаясь в бесконечность.

Из-за этого, вообще говоря, теория разрешимости краевых задач для уравнения Лапласа в многомерном случае не совсем аналогична обычно излагаемой в учебниках для  $n = 2$  теории Фредгольма. А именно, при  $n > 2$  недостаточно используемой в теории Фредгольма теории интегральных уравнений с непрерывным ядром. Правда, особенность достаточно слабая — суммируемая, поэтому можно применить теорию операторов с суммируемым ядром.

Пусть теперь плотность  $\rho$  непостоянна. Исследуем свойства потенциала двойного слоя.

1. Свойство гармоничности функции  $u$  во внутренней и во внешней областях сохраняется.

2. Легко найти разницу значений функции  $u$  на границе области и её предельных значений при подходе к границе из внутренней области и из внешней области. Она такая же, как если бы плотность была постоянной. А именно (при  $n = 2$ ),

$$u_-(x_0) = u(x_0) - \pi\rho(x_0),$$

$$u_+(x_0) = u(x_0) + \pi\rho(x_0),$$

где  $u_-(x_0)$  — предел изнутри,  $u_+(x_0)$  — предел снаружи (см. рис. 10.8).

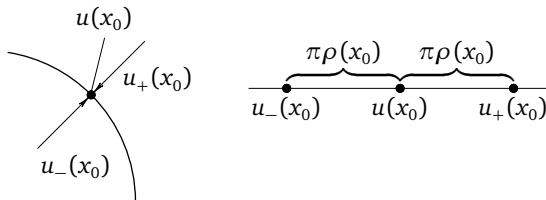


Рис. 10.8. Скачок потенциала двойного слоя

Для доказательства этого свойства рассмотрим вспомогательный потенциал двойного слоя с постоянной плотностью  $\rho = \text{const} \equiv \rho(x_0)$ ; для него это утверждение верно. Затем рассмотрим потенциал с плотностью  $\rho - \rho(q)$ , которая равна 0 в точке  $q$ , и докажем, что он имеет



нулевой скачок. Вместо формального доказательства я объясню, почему это так. Если бы плотность была нулевой в целой окрестности точки  $q$ , то эта окрестность не создавала бы двойного слоя. Остальная часть поверхности создала бы в этой окрестности потенциал двойного слоя — гармоническую функцию без особенностей. Поэтому скачки в точке  $q$  обратились бы в нули. На самом деле плотность равна нулю не в окрестности, а только в самой точке  $q$ . Поэтому для доказательства исчезновения скачка нужно провести оценки, аналогичные приведённым в добавлении к предыдущей лекции. Эти элементарные оценки показывают, что скачок потенциала равен 0. Достаточным условием для этого является непрерывность плотности в точке  $q$ .

3. Производная потенциала двойного слоя по нормали (нормаль ориентирована в одном и том же направлении как для точек внутренней области, так и для точек наружной) не имеет скачка.

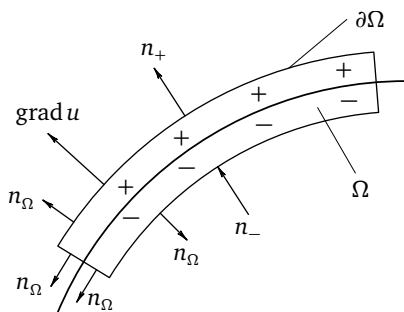


Рис. 10.9. К вычислению скачка нормальной производной потенциала двойного слоя

В случае постоянной плотности это действительно верно — производная и снаружи, и внутри равна 0. В общем случае производная потенциала есть сила («напряжённость» поля). Рассмотрим цилиндрическую область  $\Omega$ , близкую к элементу  $ds$  поверхности (см. рис. 10.9). Вычислим поток поля силы  $\text{grad } u$  через границу этой области. Учитываем (как в предыдущей лекции) только нормальную компоненту:

$$ds \left( \frac{\partial u}{\partial n_+} - \frac{\partial u}{\partial n_-} \right).$$

По формуле Стокса поток равен

$$\int_{\partial\Omega} (\text{grad } u, n_\Omega) ds = \int_\Omega \text{div grad } u ds = \int_\Omega \Delta u dx = \text{const} \int_\Omega Q dx = 0,$$

поскольку этот интеграл есть общий заряд в рассматриваемой области, а он нулевой (положительные заряды компенсируются отрицательными). Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial n_+} = \frac{\partial u}{\partial n_-}.$$

Ниже мы ещё используем свойства потенциала двойного слоя, а сейчас займёмся свойствами оператора Лапласа.

Фундаментальные решения имеют важные приложения к задаче о колебаниях сферически симметричных тел. Рассмотрим, например, окружность на плоскости (периодическую струну). Окружность  $x^2 + y^2 = 1$  является римановым многообразием, а значит, на ней определён оператор Лапласа  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ . На окружности имеется стандартная полярная координата  $\varphi$ . Через эту координату оператор  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  на окружности выражается обычным образом:  $\Delta = \partial^2 / \partial \varphi^2$ .

В больших размерностях вместо задачи о колебаниях струны получаем задачу о колебаниях сферы. Здесь нет единой координаты. Вместо тригонометрических функций ( $\sin k\varphi$ ,  $\cos k\varphi$ ), описывающих собственные колебания струны, колебания сферы описываются так называемыми сферическими функциями, появляющимися во всех задачах математической физики, где имеется сферическая симметрия. Место теории рядов Фурье функций на окружности для функций на сфере занимает разложение по сферическим гармоникам.

С практической точки зрения интересна задача о гравитационном потенциале Земли, влияющем на движение спутников. В свою очередь, спутники можно рассматривать как индикаторы, по которым можно судить о распределении масс в Земле. Как мы вскоре увидим, вклады высоких гармоник быстро убывают с удалением от Земли, так что не слишком близко к Земле потенциал близок к сумме сферически симметричной главной части  $c_1/r$  и дипольного возмущения  $c_2 z/r^3$ .

Рассмотрим задачу о собственных функциях оператора Лапласа на  $n$ -мерной сфере; при  $n = 1$  это обычные тригонометрические функции. Решив периодическую краевую задачу для уравнения

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \lambda u,$$

можно найти все гармоники. Это в точности комбинации функций  $\sin k\varphi$  и  $\cos k\varphi$  с целыми  $k$  (собственное число  $\lambda = -k^2$ ).

Как обстоит дело в больших размерностях, например на двумерной сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ? Сейчас мы познакомимся со сферическими

функциями, которые с этой точки зрения являются обобщением тригонометрических.

Рассмотрим функцию  $u(x, y, z)$ , постоянную вдоль каждого луча, выходящего из начала координат. Такая функция называется однородной степени 0 (напомню, что функция называется однородной степени  $k$ , если  $u(\lambda x) = \lambda^k u(x)$  для всякого  $\lambda > 0$ ).

В начале координат функция может не быть определённой. Например, однородной функцией степени 0 является

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}.$$

**Задача.** Найдите  $\Delta u|_{S^2}$  и сравните с  $\operatorname{div} \operatorname{grad}(u|_{S^2})$ .

Последний оператор называется *сферическим лапласианом*. Будем обозначать его через  $\tilde{\Delta}$ .

Оказывается, в пространстве любой размерности  $n$  для однородной функции  $u$  любой степени  $k$  справедливо тождество

$$\tilde{\Delta}u = r^2 \Delta u - \Lambda u, \quad \Lambda = k^2 + k(n - 2).$$

Стоящий в левой части равенства оператор — это сферический лапласиан, продолженный на всё пространство по однородности степени  $k$ ; на единичной сфере  $r^2 = 1$  это просто сферический лапласиан:

$$\tilde{\Delta}u|_{r^2=1} = \operatorname{div} \operatorname{grad}(u|_{r^2=1}).$$

Рассмотрим частные случаи.

1. При  $k = 0$  имеем тождество

$$\tilde{\Delta}u = r^2 \Delta u. \tag{10.1}$$

Его легко объяснить. Градиент однородной функции  $u$  степени 0, ограниченный на единичную сферу, совпадает с градиентом ограничения самой функции на эту сферу, поскольку градиент однородной функции нулевой степени касается сферы. Также из рассмотрения потоков легко получить, что совпадают и дивергенции градиентов, т. е. для однородных функций степени 0 обычный и сферический лапласианы на единичной сфере совпадают:  $(\tilde{\Delta}u)|_{r^2=1} = (\Delta u)|_{r^2=1}$ . А тождество (10.1) получается в силу продолжения сферического лапласиана на всё пространство с сохранением однородности. Действительно, оператор  $\Delta$  понижает степень однородности на 2 единицы, поэтому  $\Delta u$  — однородная функция степени  $-2$ . Чтобы продолжение имело степень 0, функцию  $\Delta u$  степени  $-2$  нужно умножить на  $r^2$ .

2. Пусть  $n = 2$ ,  $k \neq 0$ . Наше тождество принимает вид

$$\tilde{\Delta}u = r^2 \Delta u - k^2 u.$$

Применим его к однородной степени  $k$  гармонической на плоскости функции  $u = \operatorname{Re} z$  (в частности, при  $k = 2$  на единичной окружности  $u = \cos 2\varphi$ ).

Наше тождество принимает вид  $\tilde{\Delta}u = -k^2 u$ .

Мы не будем пока заниматься доказательством общего тождества, отметим только, что оно основано на формуле Эйлера для однородных функций степени  $k$  (докажите её в качестве упражнения):

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = ku.$$

**Следствие.** Пусть функция однородная и гармоническая. Тогда эта функция, ограниченная на единичную сферу, является собственной для сферического лапласиана:  $\tilde{\Delta}u = -\Lambda u$ .

Ниже мы увидим, что так получаются все собственные функции сферического лапласиана.

**Определение.** Сферическими функциями на сфере  $S^{n-1}$  называются ограничения на сферу однородных гармонических многочленов в  $\mathbb{R}^n$ .

**Задача.** Найдите размерность пространства сферических функций, являющихся ограничениями гармонических многочленов заданной степени однородности  $k$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Например, для  $n = 3$  получаем

$k$	0	1	2	...
размерность	1	3	5	...
	(базис $x, y, z$ )		(базис $xy, yz, zx,$ $x^2 - y^2, y^2 - z^2$ )	

Остановимся на интересном приложении сферических функций к топологической задаче.

**Теорема Максвелла.** При  $n = 3$  все сферические функции данной степени  $k$  можно получить, последовательно дифференцируя потенциал  $1/r$  вдоль подходящих постоянных векторных полей:

$$L_{v_k} \dots L_{v_1} \frac{1}{r}$$

(результат такого дифференцирования называется мультипольным потенциалом) и ограничивая результат на единичную сферу. При этом  $k$  полей  $v_1, \dots, v_k$  определяются по данной ненулевой сферической функции степени  $k$  однозначно (с точностью до ненулевых множителей).

Размерность пространства сферических функций степени  $k$  равна  $2k + 1$ . Рассматривая их с точностью до ненулевой мультипликативной постоянной и исключая 0, получаем проективное пространство  $\mathbb{R}P^{2k}$ .

С другой стороны, по теореме Максвелла все сферические функции степени  $k$  с точностью до ненулевого множителя можно получить из  $1/r$ , дифференцируя вдоль  $k$  постоянных полей векторов длины 1 в  $\mathbb{R}^3$ . Постоянные векторы длины 1 определяются функцией однозначно с точностью до знаков. Дифференцирования вдоль постоянных полей коммутируют, поэтому результат не зависит от порядка.

Таким образом, мы построили взаимно однозначное отображение

$$\mathbb{R}P^2 \times \dots \times \mathbb{R}P^2 / S(k) \rightarrow \mathbb{R}P^{2k},$$

где  $S(k)$  — симметрическая группа перестановок  $k$  сомножителей.

Первое из пространств называется *симметрической  $k$ -й степенью* проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$  и обозначается  $S^k \mathbb{R}P^2$ . Построенное отображение Максвелла  $S^k \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^{2k}$  — гомеоморфизм. По-видимому, теорема Максвелла — самое элементарное доказательство гомеоморфности этих пространств.

Родственная теорема из алгебры — теорема Виета. Отображение Виета

«корни  $\rightarrow$  элементарные симметрические многочлены от корней»

задаёт гомеоморфизм симметрической  $k$ -й степени  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{C}^k$ :  $S^k \mathbb{C} \approx \mathbb{C}^k$ .

Соответствующая проективная теорема:  $S^k(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^k$ . Комплексная проективная прямая  $\mathbb{C}P^1$  — это сфера Римана  $S^2$ , так что проективная теорема Виета доставляет гомеоморфизм  $S^k(S^2) \approx \mathbb{C}P^k$ .

## Лекция 11

### Сферические функции. Теорема Максвелла. Теорема об устранимой особенности

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  однородную функцию  $F$  степени  $k$ :

$$F(\lambda x) = \lambda^k F(x) \quad \forall \lambda > 0.$$

В нуле такая функция может не быть определена (однородная функция может быть задана в однородной области, например в некотором телесном угле с началом 0).

Мы определили для каждого  $k$  модифицированный сферический оператор Лапласа  $\tilde{\Delta}$ , который переводит однородные функции степени  $k$  в однородные с сохранением степени однородности. Напомним его определение: функция ограничивается на единичную сферу, там от неё берётся дивергенция градиента, и результат продолжается как однородная функция степени  $k$  на всё пространство, кроме начала координат.

**Теорема.** *Справедливо равенство*

$$\tilde{\Delta}F = r^2 \Delta F - \Lambda F, \quad \text{где } \Lambda = k^2 + k(n-2).$$

**Доказательство.** Вычислим  $\Delta F = \operatorname{div} \operatorname{grad} F$ . Пусть  $f$  — ограничение функции  $F$  на единичную сферу:  $f = F|_{S^{n-1}}$ ,  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$(\operatorname{grad} F)|_{S^{n-1}} = \operatorname{grad} f + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial}{\partial n},$$

см. рис. 11.1 (конечно, мы считаем здесь касательное пространство к сфере в точке вложенным в касательное пространство к объемлющему пространству; см. рис. 10.2).

По однородности  $F(rq) = r^k f(q)$ , поэтому  $\partial F / \partial r = kr^{k-1} f(q)$ . Нам достаточно найти градиент на единичной сфере, поскольку он однороден степени  $k-1$ . Наше поле раскладывается на касательную и нормальную составляющие, причём касательная составляющая не имеет потока через крышки пробной поверхности, а нормальная — через боковые стенки (см. рис. 11.2).

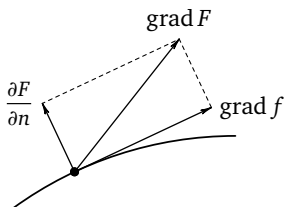


Рис. 11.1. Сферический и полный градиенты

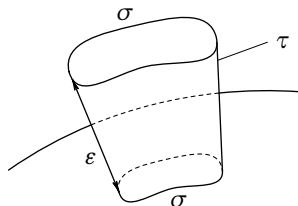


Рис. 11.2. Вычисление потока через пробную поверхность

Вычислим поток градиента через пробную поверхность:

$$\int_{\partial\Omega} (\text{grad } F, \vec{n}) dS = \int_{\tau} (\text{grad } F, \vec{n}) dS + \sigma(1 + \varepsilon)^{n-1} k f (1 + \varepsilon)^{k-1} - \sigma h f,$$

где первый член — поток через боковую поверхность, второй — через верхнюю крышку, третий — через нижнюю. В результате получаем

$$\int_{\tau} (\text{grad } F, \vec{n}) dS + \sigma(n + k - 2)\varepsilon k F + o(\varepsilon).$$

Здесь  $\varepsilon\sigma$  — объём пробной области; функции  $F$  и  $f$  совпадают на единичной сфере. Деля поток на объём пробной области и стягивая пробную область к точке на единичной сфере, в этой точке получаем равенство

$$\Delta F = \tilde{\Delta} f + kF(n + k - 2).$$

(Действительно, поток градиента функции  $F$  через  $\partial G$  есть интеграл от  $\text{div grad } F$  по  $G$ , в то время как поток градиента функции  $F$  через  $\tau$  есть  $\varepsilon \times$  (поток градиента функции  $f$  через  $\partial\sigma$ ) +  $o(\varepsilon)$ , а поток в скобках равен интегралу от  $\text{div grad } f$  по  $\sigma$ .)

Таким образом, наше тождество доказано на единичной сфере. При продолжении в точку, находящуюся от начала координат на расстоянии  $r$ , в правой части  $F$  умножится на  $r^k$ ,  $\Delta F$  — на  $r^{k-2}$ . Поэтому и возникнет множитель  $r^2$  в первом слагаемом доказываемого тождества.

Модифицированный сферический лапласиан однороден степени  $k$  по определению. Поэтому из выполнения тождества на единичной сфере следует его выполнение везде (кроме начала координат). Итак, тождество доказано.  $\square$

Наша теорема — частный случай следующего простого, но полезного замечания о лапласиане функции на подмногообразии евкли-

дова пространства: при вычислении значения лапласиана в точке можно заменить подмногообразие его касательным пространством в этой точке, а функцию — соответствующей функцией на касательном пространстве.

Рассмотрим  $m$ -мерное подмногообразие («поверхность»)

$$y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^l$$

в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{m+l}$  с метрикой  $dx^2 + dy^2$ . Будем называть  $x$ -подпространство *горизонтальным*,  $y$ -подпространство *вертикальным*. Будем рассматривать декартовы координаты точки  $x$  как координаты точки  $X = (x, y = f(x))$  на поверхности.

Функция  $U$ , заданная на поверхности, записывается в этих координатах как функция на горизонтальной плоскости

$$u(x) = U(X).$$

**Лемма.** *Предположим, что касательная плоскость поверхности в точке 0 горизонтальна (т. е. что  $(df/dx)(0) = 0$ ). Тогда риманов лапласиан функции  $U(X)$  на поверхности совпадает в этой точке с евклидовым лапласианом функции  $u(x)$  на касательной плоскости.*

**Доказательство.** Запишем метрику на поверхности в виде римановой метрики  $dS^2$  на горизонтальной плоскости. Из теоремы Пифагора следует, что отличие  $dy^2$  этой метрики от евклидовой метрики горизонтальной плоскости имеет второй по  $|x|$  порядок малости:

$$dS^2 - dx^2 = O(|x|^2)$$

(здесь и далее малость квадратичной формы или дифференциального оператора означает, конечно, малость коэффициентов). Поэтому операторы GRAD и DIV риманова градиента и римановой дивергенции, соответствующие метрике  $dS^2$  на горизонтальной плоскости, отличаются от евклидовых операторов grad и div малыми второго порядка:

$$\text{GRAD} - \text{grad} = O(|x|^2), \quad \text{DIV} - \text{div} = O(|x|^2).$$

Применяя эти операторы последовательно к функции  $u$ , мы находим

$$\text{DIV GRAD } U = \text{div grad } u + O(|x|^2) + \text{div } O(|x|^2).$$

Последнее слагаемое есть  $O(|x|)$ , поэтому

$$(\text{DIV GRAD } U)(0) = (\text{div grad } u)(0).$$

□



**Замечание.** Перенесение функции на касательную плоскость не обязательно проводить при помощи ортогонального проектирования: можно использовать любое семейство гладких кривых, важно лишь, чтобы проходящая через нашу точку кривая была в ней ортогональна поверхности.

**Пример.** Рассмотрим единичную сферу  $y = \sqrt{1 - x^2}$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве и точку  $x = 0$  на ней ( $m = n - 1$ ,  $l = 1$ ). Рассмотрим функцию  $U$  на сфере. Вычислим её сферический лапласиан в точке  $x = 0$ .

По лемме он равен евклидову лапласиану  $\Delta(x)u$  (сумме вторых частных производных по  $x_i$  от соответствующей функции  $u(x)$ ).

Однородное степени  $k$  продолжение функции  $U$  в евклидово пространство обозначим через  $\tilde{U}$ . На касательной плоскости  $y = 1$  сферы в точке  $x = 0$  эта функция обращается в функцию

$$\tilde{u}(x) = (\sqrt{1 + x^2})^k u(\tilde{x}), \quad |\tilde{x} - x| = O(|x|^3).$$

Поэтому евклидов лапласиан продолжения в нашей точке  $x = 0$ ,  $y = 1$  есть

$$\Delta \tilde{U} = \frac{d^2}{dy^2} y^k u(0) + (\Delta_x \tilde{u})(0) = k(k-1)u(0) + \Delta_x \tilde{u}.$$

Но

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \frac{k}{2} x^2 u(0) + O(|x|^3).$$

Поэтому в точке  $x = 0$  имеем

$$\Delta_x(\tilde{u}) = \Delta_x u + k(n-1)u.$$

Окончательно, в нашей точке получаем

$$\Delta \tilde{U} = \Delta_x u + [k(n-1) + k(k-1)]u(0).$$

Поскольку выбранная точка ничем не отличается от остальных, мы доказали нашу формулу  $\tilde{\Delta}F = r^2 \Delta F - \Lambda F$ ,  $\Lambda = k(n+k-2)$  при  $r = 1$ . По однородности она верна везде.

**Следствие.** Если функция  $F$  (заданная в  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ) гармоническая и однородная степени  $k$ , то она собственная для (модифицированного) сферического лапласиана:  $\tilde{\Delta}F = -\Lambda F$  (т. е. её ограничение на сферу собственное для сферического лапласиана). Обратное, собственная функция сферического лапласиана, продолженная с единичной сферы однородно степени  $k$ , гармонична всюду, кроме нуля.

Заметим, что для одной и той же собственной функции лапласиана на единичной сфере можно найти два гармонических продолжения, поскольку из квадратного уравнения  $\Lambda = k^2 + k(n-2)$  определяются два значения  $k$ .

**Пример.** Пусть  $n = 2$  (т. е. мы рассматриваем функции на плоскости и их ограничения на окружность). При  $n = 2$  имеем  $\Lambda = k^2$ . Гармонической однородной функцией степени 1 является функция  $x$ . Но существует также гармоническая однородная функция степени  $-1$ , ограничение которой на единичную окружность такое же, как и у функции  $x$ .

В полярных координатах формулы этих сопряжённых функций:

$$F = r \cos \varphi = x, \quad \widehat{F} = \frac{\cos \varphi}{r} = \frac{x}{r^2},$$

это потенциал диполя (ядро потенциала двойного слоя). Аналогично для сопряжённых степеней однородности  $k$  и  $-k$  имеем

$$F = r^k \cos k\varphi, \quad \widehat{F} = \frac{\cos k\varphi}{r^k}.$$

Пусть  $n = 3$ , т. е. мы рассматриваем функции трёх переменных и их ограничения на двумерную сферу. В случае  $n = 3$  имеем  $\Lambda = k^2 + k$ . Поэтому сопряжённая с  $k$  степень однородности есть  $\widehat{k} = -1 - k$ .

При  $k = 0$  сопряжённые функции имеют вид  $F = 1$ ,  $\widehat{F} = 1/r$ .

При  $k = 1$  имеем  $F = z$ ,  $\widehat{F} = z/r^3$ ; как и в двумерном случае, это потенциал диполя (ядро потенциала двойного слоя).

При  $k = 2$  мы можем найти гармоническую квадратичную форму, например,

$$F = \frac{3z^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2}, \quad F|_{S^2} = f = \frac{3z^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Функции  $z$  и  $f$  являются сферическими, т. е. описывают собственные колебания сферы. Кроме того, это так называемые *зональные функции*: они инвариантны относительно вращений вокруг оси  $z$  и меняют знак при переходе через параллели, которые делят сферу на отдельно колеблющиеся зоны, причём разделяющие параллели остаются неподвижными (см. рис. 11.3).

**Задача.** При любом ли целом  $k$  существует зональная сферическая функция, являющаяся ограничением на сферу многочлена степени  $k$  от  $z$ ?

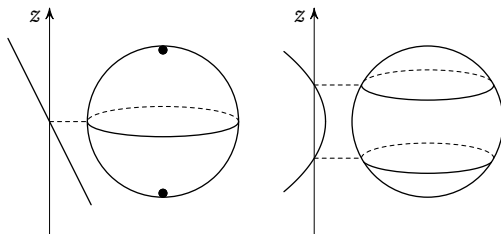


Рис. 11.3. Зональные функции описывают собственные колебания сферы

В общем случае  $\Lambda = k^2 + k(n-2)$  и сопряжённый к  $k$  показатель однородности равен  $\widehat{k} = 2 - n - k$ . Найдём значения сопряжённых функций в точках  $rq$  ( $q$  — точка единичной сферы,  $r$  — расстояние от начала координат):

$$F(rq) = r^k f(q), \quad \widehat{F}(rq) = \frac{f(q)}{r^{k+n-2}}.$$

Эти значения можно связать при помощи преобразования инверсии. При этом преобразовании точка  $qr$  переходит в точку  $q/r$  (см. рис. 11.4).

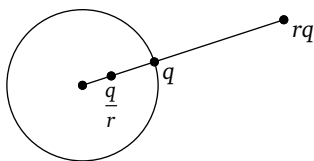


Рис. 11.4. Инверсные точки

Имеем

$$F\left(\frac{q}{r}\right) = \frac{f(q)}{r^k},$$

значит,

$$\widehat{F}(rq) = F\left(\frac{q}{r}\right) \frac{1}{r^{n-2}}$$

(заметим, что при  $n = 2$  инверсия сохраняет гармоничность, а множитель в последней формуле пропадает).

При любом  $n$  из формулы связи  $F(q/r)$  и  $\widehat{F}(rq)$  совершенно исчез показатель однородности  $k$ . Значит, она верна и для линейных комбинаций однородных функций с разными показателями однородности. Но такими функциями можно приблизить любую гармоническую функцию. Таким образом, при этом преобразовании всякая гармонич-

ческая функция  $F$  переходит в гармоническую функцию

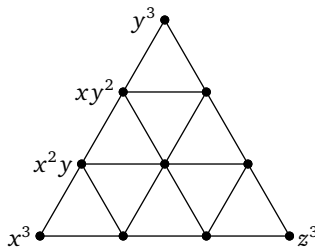
$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} F\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

(можно это проверить и явным вычислением).

**Предложение 1.** *Однородные гармонические функции степени  $k$  существуют только при целых  $k$ . (Собственные функции сферического лапласиана существуют только при  $\Lambda$ , соответствующих целым  $k$ .)*

Изучим сначала однородные гармонические многочлены. Пространство однородных многочленов нулевой степени одномерно, пространство многочленов степени 1 имеет размерность  $n$ , размерность пространства многочленов степени 2 и выше найдём для простоты в трёхмерном случае (см. рис. 11.5):

степень	0	1	2	3
размерность	1	3	6	10



**Рис. 11.5.** Определение размерности пространства однородных многочленов степени 3

Вообще, справедлива формула

$$\dim S^k \mathbb{R}^3 = C_{k+2}^2 = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Оператор Лапласа переводит это пространство в пространство  $S^{k-2} \mathbb{R}^3$  однородных многочленов степени на 2 меньше, чем исходная. Гармонические однородные многочлены степени  $k$  образуют линейное пространство — ядро отображения

$$\Delta: S^k \mathbb{R}^3 \rightarrow S^{k-2} \mathbb{R}^3.$$

**Утверждение.** *Лапласиан отображает  $S^k \mathbb{R}^3$  на  $S^{k-2} \mathbb{R}^3$ .*

Действительно, любой многочлен есть образ некоторого многочлена под действием лапласиана.

Достаточно проверить это для одночленов. Для одночленов от одной переменной  $x$  это очевидно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^p \quad \text{при} \quad u = \frac{x^{p+2}}{(p+2)(p+1)}.$$

Для одночлена  $x^p y^q$  от  $x$  и ещё  $m$  переменных  $y_i$  начинаем с одночлена

$$u = \frac{x^{p+2} y^q}{(p+2)(p+1)}.$$

Имеем

$$\Delta_{x,y} u = x^p y^q + v,$$

где  $v = \Delta_y u$  — многочлен, степень которого по  $y$  меньше  $|q|$ . Поэтому  $x^p y^q$  лежит в образе  $\Delta_{x,y}$ , если все многочлены степени меньше  $|q|$  по  $y$  в нём лежат. Это позволяет доказать требуемое утверждение индукцией по  $|q|$  (если  $\Delta_{x,y} w = v$ , то  $\Delta_{x,y}(u - w) = x^p y^q$ ).

Итак, размерность пространства сферических функций степени  $k$  равна разности размерностей пространств  $S^k \mathbb{R}^3$  и  $S^{k-2} \mathbb{R}^3$ , т. е.

$$\frac{(k+2)(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = 2k + 1.$$

**Следствие.** Для каждого неотрицательного целого  $k$  на сфере  $S^2$  существует  $(2k+1)$ -мерное линейное пространство сферических функций — собственных функций сферического лапласиана с собственным числом  $-\Lambda$ ,  $\Lambda = k^2 + k$ , — являющихся ограничениями гармонических однородных многочленов степени  $k$  в  $\mathbb{R}^3$  на сферу.

**Доказательство.** Собственность ограничений следует из доказанного тождества. Размерность пространства гармонических в  $\mathbb{R}^3$  однородных многочленов степени  $k$  только что подсчитана. Размерность пространства их ограничений на сферу такая же, так как равный на сфере нулю однородный многочлен равен нулю тождественно.  $\square$

Мы нашли размерность пространства гармонических однородных многочленов степени  $k$  для  $n = 3$ . В общем случае его размерность растёт как  $k^{n-2}$ .

**Утверждение.** Сферические функции с разными собственными числами попарно ортогональны.

Действительно, собственные колебания с разными собственными частотами всегда ортогональны, как главные оси эллипсоида в евклидовом пространстве с разными длинами.

Отсюда следует, например, что

$$\int_{S^2} (3z^2 - 1) dz = 0.$$

Конечно, этот интеграл можно и явно вычислить при помощи симметризации: три таких интеграла для  $x, y, z$  равны между собой, а в сумме дают 0.

**Теорема.** *Всякая сферическая функция (собственная функция сферического лапласиана) является ограничением на сферу однородного гармонического многочлена в объемлющем пространстве.*

**Доказательство.** Собственные числа сферического лапласиана неположительны, так как потенциальная энергия — интеграл Дирихле — неотрицательна.

Нулевому собственному числу отвечают гармонические на сфере собственные функции. Гармоническая на сфере функция — константа (по принципу максимума), так как сфера — замкнутое (не имеющее края и компактное) связное многообразие. (Действительно, вырежем малую дыру, тогда максимум будет достигаться на границе дыры. Стягивая дыру в точку, убеждаемся, что значение функции, гармонической на замкнутом связном многообразии, в любой его точке равно максимуму этой функции по всему многообразию.)

Теперь рассмотрим любое отрицательное собственное число  $-\Lambda$ ,  $\Lambda > 0$ . Для любого  $\Lambda > 0$  существует такой показатель однородности  $k > 0$ , что  $\Lambda = k(k + n - 2)$  (см. рис. 11.6).

Собственная функция сферического лапласиана с собственным числом  $-\Lambda$  продолжается на всё пространство без нуля в виде гармонической однородной функции степени  $k$  (по нашему основному тождеству).

Поскольку  $k$  положительно, продолженная функция в окрестности нуля ограничена. По доказываемой ниже теореме об устранимой особенности гармоническая в окрестности нуля ограниченная функ-

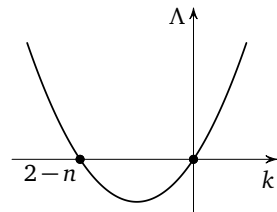


Рис. 11.6. Собственное число как функция степени

ция остаётся гармонической при продолжении в начало координат по непрерывности. Для продолженной функции имеем  $u(0) = 0$ , поскольку  $u(rq) = r^k u(q)$ ,  $k > 0$ .

Продолженная функция в нуле гармоническая и, следовательно, гладкая. Но гладкая в нуле однородная функция степени  $k$  обязательно является однородным многочленом степени  $k$  (причём  $k$  обязательно целое неотрицательное) — это видно из формулы Тейлора. Итак, любая сферическая функция продолжается до однородного гармонического во всём пространстве многочлена.  $\square$

**Теорема Максвелла.** *Все сферические функции степени  $k$  при  $n = 3$  можно получить последовательным дифференцированием функции  $1/r$  вдоль  $k$  направлений.*

**Доказательство.** Во-первых, очевидно, что производная гармонической функции вдоль постоянного векторного поля гармонична. Например, частные производные гармонической функции гармоничны.

Во-вторых, на сфере производные совпадают с некоторыми однородными многочленами. Для исходной функции  $1/r$  это так:  $1$  — однородный многочлен степени нуль.

Допустим, что после  $a$  дифференцирований получена функция вида  $F/r^a$ , где  $F$  — однородный многочлен степени  $d$ . При дифференцировании вдоль постоянного поля однородность сохраняется, степень понижается на 1. Пусть  $\nabla_{\vec{v}}$  — дифференцирование вдоль постоянного поля  $\vec{v}$ . Тогда

$$\nabla_{\vec{v}} \frac{F}{r^a} = \frac{\nabla_{\vec{v}} F \cdot r^a - F a \cdot r^{a-2}(\vec{v}, \vec{r})}{r^{2a}} = \frac{(\nabla_{\vec{v}} F)r^2 - aF(\vec{v}, \vec{r})}{r^{a+2}}.$$

Числитель — однородный многочлен степени  $d + 1$ . Поэтому получающаяся гармоническая функция после ограничения на единичную сферу совпадает с однородным многочленом. Этот многочлен гармонический. Действительно, после дифференцирования мы получим гармоническую однородную функцию отрицательной степени. Показатель её однородности сопряжён к показателю однородности числителя, являющегося однородным многочленом положительной степени. При ограничении однородной гармонической функции на сферу получается сферическая функция. Если продолжить её с сопряжённым положительным показателем однородности, то получится гармонический во всём пространстве многочлен (по предыдущей теореме). Итак, ограничение нашей производной на сферу совпадает с ограничением на неё некоторого однородного гармонического

во всём пространстве многочлена. Можно доказать (см. приложение 1), что пространство функций, получающихся таким образом, линейно (это вовсе не очевидно).

Чтобы доказать, что таким образом получатся все сферические функции, достаточно убедиться, что в пространстве сферических функций нет собственных подпространств, инвариантных относительно всех вращений. Тогда подпространство, полученное конструкцией Максвелла (оно инвариантно относительно вращений), совпадает со всем пространством сферических функций.

Для доказательства неприводимости представления группы вращений сферы  $S^2$  линейными преобразованиями  $(2n + 1)$ -мерного пространства сферических функций (т. е. отсутствия нетривиальных инвариантных подпространств) достаточно, например, убедиться, что всё это пространство состоит из линейных комбинаций одной-единственной функции и её поворотов. В качестве такой порождающей всё пространство сферической функции можно взять, например, зональную сферическую функцию. Исследуем эти функции несколько подробнее.

Мы имеем два способа продолжения сферических функций до однородных гармонических функций. Рассмотрим случай конструкции Максвелла, когда все дифференцирования производятся по одному и тому же направлению, например вдоль оси  $z$ . Ограничивая функции

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \frac{1}{r}$$

на сферу, будем получать сферические функции. При  $k = 0$  имеем 1, при  $k = 1$  получим  $z/r^3$ ; каждый раз будем получать выражение вида

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)r^2 - aFz\right)\frac{1}{r^{a+2}}.$$

Если  $F = F(z, r)$ , то при наших дифференцированиях такой вид  $F$  сохраняется, поэтому на единичной сфере получится функция только от  $z$ . Значит, *в пространстве сферических функций любой степени  $k$  есть функция, зависящая только от  $z$* . Она является ограничением на сферу некоторого многочлена от  $z$ , который называется многочленом Лежандра. Многочлены Лежандра разных степеней попарно ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  оси  $z$ , так как равный нулю интеграл по сфере от их произведения превращается просто в интеграл по  $dz$  по теореме Архимеда о симплектоморфизме сферы без полюсов и цилиндра (элемент площади сферы равен элементу площади описан-



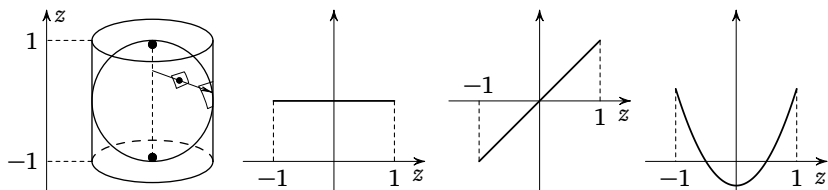


Рис. 11.7. Симплектоморфизм Архимеда сферы на цилиндр и графики первых трёх многочленов Лежандра

ного цилиндра при проектировании на цилиндр горизонтальными радиусами; см. рис. 11.7).

**Следствие.** Многочлен Лежандра степени  $k$  имеет на интервале  $(-1, 1)$   $k$  различных корней.

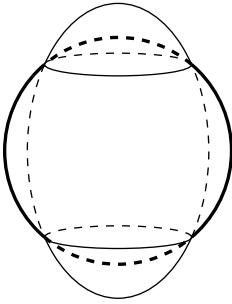
Действительно, число нулей не больше  $k$ , так как многочлен имеет степень  $k$ . Предположим, что число корней меньше  $k$ . Тогда число  $t$  корней на интервале  $(-1, 1)$ , в которых многочлен меняет знак, тем более меньше  $k$ . Составим линейную комбинацию из многочленов Лежандра степени не выше  $t$ , которая обращается в 0 первого порядка в этих  $t$  нулях. Такая линейная комбинация существует, так как линейные комбинации многочленов Лежандра степени не выше  $t$  — это все многочлены степени  $t$  (пространство многочленов имеет размерность  $t + 1$ , а первые  $t + 1$  многочленов Лежандра линейно независимы). Умножим построенную линейную комбинацию на наш многочлен Лежандра степени  $k$ . Произведение не меняет знака на интервале  $(-1, 1)$ . Это противоречит ортогональности многочленов Лежандра степени  $k$  многочленам Лежандра меньших степеней.

Итак, число различных корней многочлена Лежандра степени  $k$  на интервале  $(-1, 1)$  равно  $k$ . Следовательно, все корни простые.

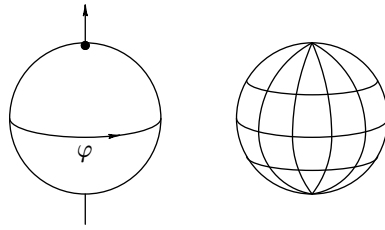
Каждый многочлен Лежандра описывает зональное собственное колебание сферы (см. рис. 11.8).

Кроме многочлена Лежандра  $f$  степени  $k$ , то же собственное число имеют ещё присоединённые функции  $f_j(z) \cos j\varphi$ ,  $f_j(z) \sin j\varphi$  ( $j < k$ ), которые также описывают собственные колебания (см. рис. 11.9); каждая долька в сетке колеблется отдельно.

Присоединённые функции можно получить из многочлена Лежандра, поворачивая сферу вокруг оси  $x$  или оси  $y$  на малый угол  $\alpha$ . Многочлен Лежандра превращается при этом в близкую сферическую функцию. Присоединённая функция измеряет разность между



**Рис. 11.8.** Колебание сферы, соответствующее многочлену Лежандра



**Рис. 11.9.** Колебания сферы, соответствующие присоединённым функциям

исходной и сдвинутой функцией. А именно, производная сдвинутой функции по  $\alpha$  и является присоединённой сферической функцией:

$$\left(x\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)f(z) = xf'(z) = f'(z)\sqrt{1-z^2}\cos\varphi.$$

При повторных дифференцированиях появляются функции  $\cos 2\varphi$  и т. д. Эти вычисления доказывают, между прочим, что все сферические функции порождаются одной зональной, и, следовательно, доказывают неприводимость (отсутствие инвариантных подпространств).

В частности, отсюда вытекает, что конструкция Максвелла даёт все сферические функции.  $\square$

Можно доказать (см. приложение 1), что пространство  $k$ -кратных производных от функции  $1/r$  по  $k$  постоянным (и, следовательно, коммутирующим) векторным полям линейно (производная линейно зависит от поля). Размерность этого линейного пространства производных не превосходит  $2k + 1$ , так как ненулевое  $k$ -кратное дифференцирование задаётся направлениями  $k$  векторов ( $k$  точками на 2-сфере) и ещё одним общим множителем.

С другой стороны, выше мы построили линейное отображение этого линейного пространства размерности  $2k + 1$  на всё  $(2k + 1)$ -мерное пространство гармонических однородных многочленов степени  $k$  в  $\mathbb{R}^3$ . Значит, это отображение — изоморфизм. Следовательно, конструкция Максвелла не только даёт все сферические функции с данным  $k$ , по они получаются, с точностью до множителя, по одному разу. Тем самым доказано топологическое утверждение:

$$S^k(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2k}.$$

Теория сферических функций имеется в любой размерности, в любой размерности есть зональные функции. При  $n = 3$  это полиномы Лежандра. Посмотрим, что получится при  $n = 2$ .

Колебания окружности описываются собственными функциями  $\cos k\varphi$ ,  $\sin k\varphi$ . Существование зональных колебаний означает, что из этих двух функций можно составить линейную комбинацию, зависящую только от  $z$ . Но это очевидно: такой функцией является функция  $z = \cos \varphi$ , а также функция  $\cos k\varphi$  при любом  $k$  (см. рис. 11.10).

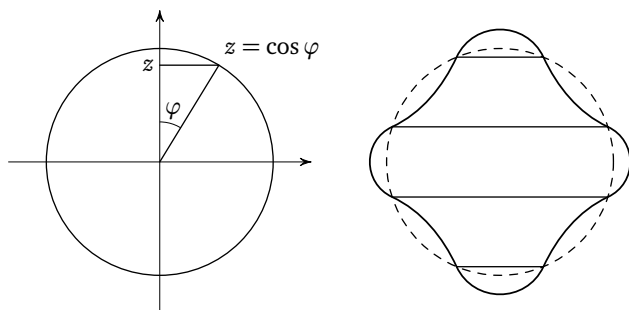


Рис. 11.10. Зональные колебания окружности

**Следствие.** Справедливо равенство  $\cos k\varphi = T_k(\cos \varphi)$ , где  $T_k$  — многочлен.

Эти многочлены называются *многочленами Чебышёва*. Они ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$ , правда, с весом (посчитайте с каким) и имеют свойства нулей, аналогичные свойствам нулей полиномов Лежандра.

Между прочим, роль присоединённых функций здесь играют функции  $\sin k\varphi$ , получающиеся из зональных дифференцированиями по углу поворота зональной функции.

Большинство так называемых специальных функций математической физики возникает в задаче о колебаниях тел с той или иной симметрией в пространстве какой-либо размерности.

Например, задача о колебаниях круга приводит к так называемым функциям Бесселя. Бессель — немецкий астроном, встретивший эти функции при разложении гравитационного потенциала Солнца, ограниченного на кеплеров эллипс, в ряд Фурье.

Тот факт, что столь различные физические задачи, как задача о колебаниях круга и о притяжении планет, приводят к одной и той же

математической теории, является удивительным проявлением универсальности математики и единства всего сущего.

Чтобы закончить доказательство поразительной теоремы Максвелла, остаётся доказать использованную в нём (и также поразительную) теорему об устранимой особенности.

**Теорема.** Пусть  $n = 2$ . Если функция в  $\mathbb{R}^n$  гармонична в некоторой проколотой окрестности точки и ограничена, то она продолжается по непрерывности в эту точку и продолженная функция гармонична в полной окрестности точки, включая саму точку.

Эта теорема имеет простой физический смысл. Гармоническая функция описывает стационарное состояние мембраны, натянутой на некоторый контур. Например, мембрану можно натянуть на два колючка. Теорема утверждает, что нельзя подпереть мембрану в одной точке иголкой, иголка пройдёт насквозь (см. рис. 11.11).

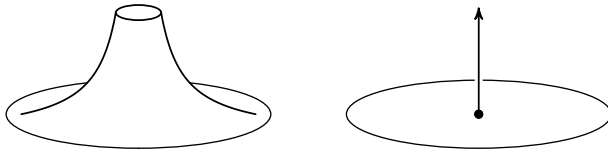


Рис. 11.11. Мембрану можно подпереть колючком, но нельзя иголкой

В случае тонкой пластинки, которая описывается уравнением  $\Delta^2 u = 0$ , соответствующее утверждение неверно, т. е. пластинку можно подпереть в одной точке.

**Доказательство.** Рассмотрим окружность с центром в рассматриваемой точке  $O$  (сдвинув и растянув координаты, можно считать, что окружность задаётся условием  $r = 1$ ). Построим гармоническую функцию в круге, совпадающую на окружности с нашей функцией. Мы уже знаем, что такая функция существует (явная формула — интеграл Пуассона — указана в лекции 7). Надо доказать, что разность между исходной и построенной функциями (обозначим её  $u$ ) равна нулю в проколотом круге.

Рассмотрим функцию  $u_0 = C \ln(1/r)$ . Она гармонична в проколотом круге и равна нулю на окружности  $r = 1$ . Подберём  $C$  так, чтобы при  $r = \varepsilon$  эта функция была больше  $u$ .

Функция  $u$  в проколотом круге ограничена; пусть там  $|u| \leq M$ . Чтобы при  $r = \varepsilon$  функция  $u_0$  была равна  $M$ , выберем  $C = M / \ln(1/\varepsilon)$ .

Тогда на единичной окружности  $u = u_0 = 0$ , а на окружности радиуса  $\varepsilon$   $u \leq u_0$ . В кольце между окружностями обе функции гармоничны, а на обеих границах  $u \leq u_0$ . По принципу максимума гармоническая в кольце функция  $u_0 - u$  неотрицательна всюду в кольце (см. рис. 11.12). И так,

$$0 \leq u \leq \frac{M \ln(1/r)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Такому же неравенству удовлетворяет и функция  $-u$ .

Пусть  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда во всех точках круга получаем  $u = 0$  (рис. 11.12). □

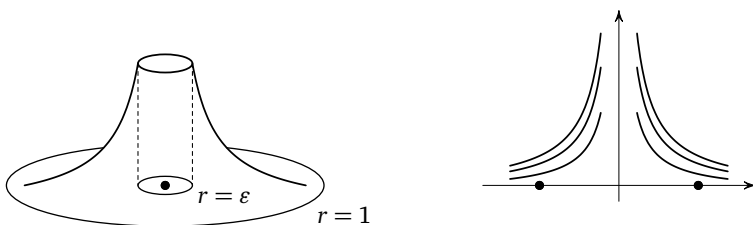


Рис. 11.12. Метод барьера устранения особенности

Аналогичное доказательство проходит и в случае, когда в нуле особенность слабее логарифмической. Применённый метод устранения особенности называется методом барьера. Сущность метода состоит в том, чтобы найти положительную гармоническую функцию вне особенности, стремящуюся к бесконечности при подходе к особенности. Умножив такую «барьерную» функцию на подходящую константу, её можно сделать сколь угодно малой в любой точке вне особенности. Если исследуемая функция стремится к бесконечности при подходе к особенности медленнее, чем барьерная функция, то особенность устранима: на краях кольца исследуемая функция меньше (не больше) барьерной, поэтому она по модулю меньше (не больше) её везде и поэтому равна нулю.

Теорема об устранимой особенности верна в любой размерности; особенность должна быть слабее, чем у фундаментального решения. Доказательство совершенно такое же, как при  $n = 2$ , только вместо  $C \ln(1/r)$  нужно поставить  $C(r^{n-2} - 1)$ .

**Следствие.** Ограниченная гармоническая функция на плоскости постоянна.

**Замечание.** Этот результат, принадлежащий Лиувиллю, справедлив и в  $\mathbb{R}^n$  при любом  $n$ , но приведённое ниже простое доказательство проходит только при  $n = 2$ .

**Доказательство.** Сфера Римана при помощи стереографической проекции покрывается двумя плоскими картами, которые связаны между собой преобразованием  $w = 1/z$ . Рассмотрим нашу функцию  $u(z)$  в карте  $w$ , там она гармонична и ограничена в окрестности нуля. По теореме об устранимой особенности она ограничена и гармонична на всей сфере Римана, а значит, постоянна.  $\square$

**Замечание.** Достаточно даже ограниченности с одной стороны; например, всякая положительная гармоническая на всей плоскости функция постоянна.

**Задача.** Докажите, что если гармоническая на плоскости функция растёт не быстрее многочлена, то она является многочленом.

**Указание.** Производные такой функции растут не быстрее многочлена. Отсюда ввиду уравнений Коши — Римана следует, что голоморфная функция  $f$ , вещественной частью которой является исходная гармоническая функция, растёт не быстрее некоторого многочлена. Значит, голоморфная в некоторой проколотой окрестности  $z = \infty$  (т. е.  $w = 0$ ) функция

$$\frac{f(z)}{z^N} = w^N f\left(\frac{1}{w}\right)$$

ограничена. Из теоремы об устранимой особенности следует, что она голоморфна при  $w = 0$ , поэтому  $f$  — многочлен степени не выше  $N$ .

**Задача.** Устранима ли особенность ограниченной функции, гармонической в дополнении к отрезку в  $\mathbb{R}^3$ ?

**Указание.** В качестве барьера возьмите потенциал заряда плотности 1 на отрезке.

**Задача.** Докажите теорему Лиувилля в  $\mathbb{R}^n$ : ограниченная гармоническая функция постоянна.

**Указание.** Воспользуйтесь формулой Пуассона или разложением в ряд по сферическим функциям на большой сфере.

## Лекция 12

### Краевые задачи для уравнения Лапласа. Теория линейных уравнений и систем

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  компактную связную гладкую гиперповерхность  $S^{n-1}$ , делящую  $\mathbb{R}^n$  на две области: внутреннюю (ограниченную) область  $G$  и внешнюю (неограниченную) область  $G'$ . Пусть на границе задана непрерывная функция  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа заключается в следующем: ищем в замыкании области  $G(G')$  функцию  $u$ , для которой выполняются условия следующие условия.

1. Функция  $u$  гармонична:  $\Delta u = 0$  в области  $G$  (внутренняя задача) или  $G'$  (внешняя задача).

2. Функция непрерывна в замыкании области:  $u \in C(\bar{G})$  (соответственно  $C(\bar{G}')$ ).

3. Функция удовлетворяет граничному условию  $u|_{S^{n-1}} = f$ .

4. В случае внешней задачи рассматриваются также некоторые дополнительные условия на бесконечности, влияющие на существование и единственность решения. Эти условия в разных учебниках ставятся по-разному. Наиболее обычно (выглядящее на первый взгляд странным) условие

$$|u| < C \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad n = 2;$$

$$u \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad n > 2.$$

Задачей Неймана называется задача, в которой третье условие имеет вид  $\partial u / \partial n = f$ , тогда во втором условии надо потребовать гладкости на границе класса  $C^1$  или какого-нибудь другого достаточного условия существования нормальной производной.

В случае задачи Неймана тоже обычно накладываются условия типа 4. Физически краевое условие Дирихле 3 соответствует закреплённой по краю мембране, а условие Неймана  $\partial u / \partial n = 0$  — свободной.

Комбинируя варианты внутренняя — внешняя, Дирихле — Неймана, получаем всего 4 типа краевых задач. Рассмотрим всё по порядку.

## 1. Внутренняя задача Дирихле

Решение существует и единственно.

Например, при  $n = 2$  интеграл Пуассона даёт решение задачи Дирихле в круге. Произвольную область по теореме Римана можно конформно отобразить на круг, а значит, получить и в ней решение задачи Дирихле. К сожалению, доказательство теоремы Римана основано на существовании решения задачи Дирихле. К тому же этот приём не работает в больших размерностях. Тем не менее результат верен в любой размерности: существует единственное решение задачи Дирихле.

Результат сохраняется и в случае плоской или многомерной области, ограниченной несколькими связными поверхностями. Единственность сразу следует из принципа максимума (см. предыдущие лекции). Идея доказательства существования заключается в минимизации интеграла Дирихле при заданных граничных условиях. Этот минимум может достигаться, как мы уже знаем, только на решении задачи Дирихле. Он действительно достигается. Физически это достаточно очевидно (стационарное состояние натянутой на контур мембраны). Но доказательство нетривиально, встречаются тонкости. Например, для мембраны, подпёртой в одной точке, нижняя грань интеграла Дирихле не достигается (см. теорему об устранимой особенности в лекции 10). Мы не будем доказывать существование минимума.

## 2. Внешняя задача Дирихле

Её можно свести к внутренней. Для этого надо сделать инверсию с центром в некоторой точке области. Если эту точку принять за начало координат, то инверсия задаётся формулой  $x \mapsto x/|x|^2$ . При  $n = 2$  гармонические функции переходят в гармонические. При  $n > 2$  гармонической будет функция

$$\frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right).$$

Новую функцию мы рассматриваем в ограниченной области, в которую перешла внешность области  $G$  при инверсии (см. рис. 12.1), и ставим для неё внутреннюю задачу Дирихле.

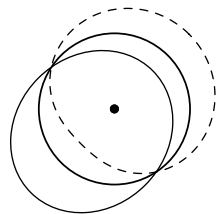


Рис. 12.1. Преобразование областей при инверсии



Видно, что может появиться особенность в нуле. Но если исходная функция во внешности области  $G$  ограничена, то особенность устраняется. Итак, ограниченное решение внешней задачи Дирихле существует и единственно. При  $n > 2$  оно стремится к 0 на бесконечности, так как при возвращении ко внешней области ограниченное решение внутренней задачи будет поделено на растущую на бесконечности величину  $|x|^{n-2}$ .

Неограниченное решение неединственно. Например, при  $n = 2$  если граница — окружность  $r = 1$ , то к ограниченному решению можно добавить фундаментальное (растущее на бесконечности) решение с любым коэффициентом (оно равно нулю на границе). Можно добавлять и другие гармонические функции, например  $r \cos \varphi$ ,  $(\cos \varphi)/r$  и т. п. Если не наложить условия 4, то получим бесконечномерное пространство решений.

Условие 4 при  $n > 2$  выбирается так, чтобы преобразованная функция

$$\frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right),$$

поделённая на фундаментальное решение  $1/|x|^{n-2}$ , стремилась к 0 при  $|x| \rightarrow 0$ . Тогда к преобразованной функции применима теорема об устранимой особенности и внешняя задача Дирихле сводится к внутренней. Так получается условие  $u \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ .

### 3. Внутренняя задача Неймана

Пусть сначала  $n = 2$ . Гармоническая функция является вещественной частью голоморфной. Мнимая часть этой голоморфной функции — гармоническая функция, сопряжённая к нашей. Условия Коши — Римана означают, что производная нашей искомой функции по нормали к границе равна производной сопряжённой функции по ортогональному направлению (см. рис. 12.2).

Получаем, что задана производная сопряжённой функции  $v$  вдоль границы. Если бы по этой производной удалось восстановить саму функцию  $v$  на границе, то задача Неймана для функции  $u$  свелась бы к задаче Дирихле для функции  $u$ .

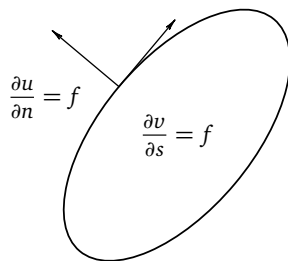


Рис. 12.2. Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле

Но восстановить  $v$  по производной удаётся не всегда, к этому могут быть препятствия топологического характера. Например, если граница топологически есть окружность с координатой  $s$  на ней, то необходимым и достаточным условием возможности восстановления  $v$  по  $f = \partial v / \partial s$  является условие  $\oint_{\partial G} f ds = 0$ . В случае неодносвязной области, например кольца, для разрешимости задачи требуется тоже одно условие: интеграл от граничной функции по границе кольца равен нулю. Не возникает двух условий типа «интеграл по каждой окружности равен нулю», как можно было бы ожидать (почтительно подумать, почему это так!). Итак, получается следующий результат.

**Теорема.** *Внутренняя задача Неймана разрешима тогда и только тогда, когда  $\oint_{\partial G} f ds = 0$ . Решение единственно с точностью до аддитивной константы. Таким образом, пространство решений одномерно.*

**Замечание.** Рассмотрим линейный оператор  $A: X \rightarrow Y$ . В пространстве  $X$  имеется подпространство  $\text{Ker } A$  — ядро оператора  $A$ , а в пространстве  $Y$  подпространство  $\text{Im } A$  — образ оператора  $A$ .

Число  $k = \dim \text{Ker } A$  есть число линейно независимых решений однородного уравнения  $Au = 0$ , а число  $s = \text{codim } \text{Im } A$  есть число независимых условий, которые надо наложить на правую часть неоднородного уравнения  $Au = f$ , чтобы обеспечить разрешимость.

Обозначим также  $c = \text{codim } \text{Ker } A$ ,  $i = \dim \text{Im } A$ . Имеем  $c + k = \dim X$ ,  $i + s = \dim Y$ . Кроме того, выполняется равенство  $c = i$  (фактор по ядру отображается на образ изоморфно). Значит,

$$k - s = \dim X - \dim Y.$$

Мы видим, что число  $k - s$ , называемое индексом оператора  $A$ , на самом деле не зависит от оператора, а определяется пространствами.

Иногда это наблюдение удаётся обобщить на бесконечномерные пространства. Это можно сделать при условии, что  $A$  достаточно хорошо приближается конечномерными операторами. В наших приложениях  $X, Y$  будут функциональными пространствами и потребуются достаточно хорошая аппроксимация конечными суммами рядов Фурье.

Посмотрим с этой точки зрения на наши краевые задачи.

В случае внутренней задачи Дирихле  $s = 0$ ,  $k = 0$ ,  $s - k = 0$ .

В случае внутренней задачи Неймана  $s = 1$ ,  $k = 1$ ,  $s - k = 0$ . Окажется, в обеих задачах речь идёт об отображении одних и тех же пространств.

Необходимость условия  $\oint_{\partial G} f ds = 0$  для разрешимости внутренней задачи Неймана можно получить и исходя из соображений минимизации интеграла Дирихле. При  $n = 2$  очевидно, например, что нормальная производная не может быть положительной на всей границе, иначе нарушится принцип максимума (см. рис. 12.3, слева). Если производная положительна, то появится особенность не меньше логарифмической (см. рис. 12.3, справа).

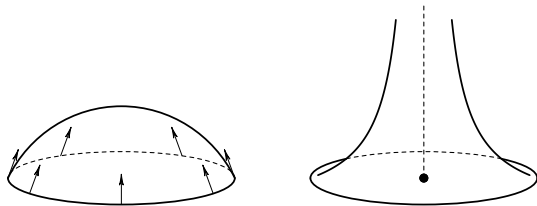


Рис. 12.3. Нормальная производная гармонической функции не может быть положительной

**Задача.** Проведите интегрирование по частям в интеграле Дирихле  $\int_G (\nabla u)^2 dx$  в многомерном случае и убедитесь, что условие  $\oint_{\partial G} f ds = 0$  необходимо для разрешимости внутренней задачи Неймана.

#### 4. Внешняя задача Неймана

В двумерном случае внешнюю задачу можно свести к внутренней (в многомерном это не удаётся). Заметим, что при условии  $du/\partial n = 1$  на граничной окружности  $r = 1$  внутренняя задача неразрешима, а внешняя имеет решение  $\ln(1/r)$ . Любую функцию на границе можно представить в виде суммы константы и функции с нулевым интегралом по границе. Инверсией можно свести внешнюю задачу к внутренней: производная по внешней нормали переходит в производную по внутренней нормали. Это верно для произвольной области: инверсия — конформное отображение, нормаль к граничной прямой переходит в нормаль к её образу при инверсии.

Окончательный результат: без ограничения 4 решение не единственно; при условии 4 решение единственно, причём существует тогда и только тогда, когда  $\oint_{\partial G} f ds = 0$ .

То же верно в больших размерностях. При этом  $s = 1$ ,  $k = 1$ ,  $k - s = 0$ .

Доказательства всех перечисленных результатов о существовании единственности решений краевых задач строятся следующим мето-

дом. Решение ищем в виде потенциала с неизвестной плотностью. Для этой плотности получается интегральное уравнение, разрешимость которого и доказывается.

Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Дирихле. Решение ищем в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью  $\rho$  на границе. Обозначим значение потенциала на границе через  $A\rho$ , где  $A$  — линейный (интегральный) оператор из пространства функций на границе в себя. По теореме о скачке потенциала двойного слоя предельное значение потенциала внутри области при подходе к границе есть  $A\rho + \lambda\rho$ , где  $\lambda$  — константа, зависящая лишь от размерности (она равна  $\pi$  в двумерном и  $2\pi$  в трёхмерном случае). Граничное условие Дирихле  $u|_{\partial G} = f$  принимает поэтому вид уравнения  $(A + \lambda E)\rho = f$  для плотности  $\rho$ .

Если бы пространство плотностей было конечномерным, мы сразу решили бы это уравнение:  $\rho = (A + \lambda E)^{-1}f$ . Существование обратного оператора гарантируется тогда отсутствием ненулевого решения у однородного уравнения.

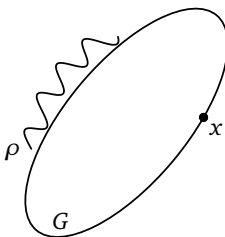
Единственность решения уравнения  $(A + \lambda E)\rho = 0$  следует из принципа максимума, так как равная на границе области  $G$  нулю непрерывная в замыкании этой области и гармоническая внутри функция везде равна нулю. Поэтому если бы пространство функций  $\rho$  было конечномерным, то существование решения задачи Дирихле было бы доказано.

На самом деле это пространство бесконечномерно, но оператор  $A$  настолько хорошо аппроксимируется конечномерными, что вывод сохраняется.

Причина, по которой оператор  $A$  почти что конечномерен, состоит в следующем. Оператор переводит плотность  $\rho$  в значение потенциала на границе. Рассмотрим на границе точку  $x$  (см. рис. 12.4).

Разложим плотность в ряд Фурье. Высокая гармоника этого ряда быстро осциллирует. Физически это означает наличие близких зарядов с противоположными знаками. Они действуют противоположно, поэтому такая гармоника вносит малый вклад в результат в точке  $x$ . Следовательно, оператор  $A$  хорошо приближается конечномерными. Благодаря этому индекс оператора  $A + \lambda E$  равен нулю, как для оператора из конечномерного пространства в себя, хотя этот оператор и действует в бесконечномерном пространстве плотностей.

В многомерном случае для сферической границы можно использовать вместо разложения Фурье разложение по сферическим функ-



**Рис. 12.4.** Высокая гармоника даёт малый вклад в значение потенциала в точке границы

циям. Для других граничных многообразий используются аналогичные рядом Фурье локальные разложения вблизи каждой точки.

На этом мы заканчиваем наше краткое обсуждение вопросов существования и единственности решений основных краевых задач для уравнения Лапласа. Для аккуратного доказательства сформулированных результатов нужен аппарат теории интегральных уравнений Фредгольма, для построения которого в этих лекциях нет времени. Краткое его изложение имеется, например, в учебнике Г. Е. Шилова «Введение в теорию линейных пространств».

## 5. Линейные уравнения с частными производными и их символы

Вернёмся к общей теории дифференциальных уравнений. Напомним вначале общее понятие линеаризации. Начнём с обыкновенного дифференциального уравнения, заданного векторным полем  $v$  в фазовом пространстве. Пусть  $x_0$  — положение равновесия дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x)$ , т. е.  $v(x_0) = 0$ . Тогда в окрестности точки  $x_0$  можно поставить задачу о малых колебаниях вокруг положения равновесия, описываемых линеаризованной системой:

$$\dot{y} = Ay, \quad A = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (\text{см. рис. 12.5}).$$

Замена уравнения  $\dot{x} = v(x)$  уравнением  $\dot{y} = Ay$  называется *линеаризацией* системы в точке  $x_0$ . Линеаризованное векторное поле живёт в касательном пространстве исходного фазового пространства в положении равновесия. Оно не зависит от системы координат, используемой при вычислении матрицы Якоби  $\partial v / \partial x|_{x_0}$ .

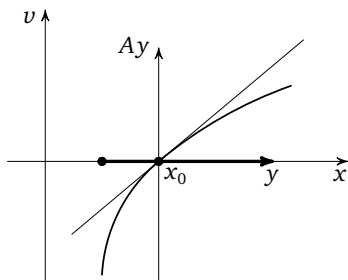


Рис. 12.5. Линейризация в окрестности положения равновесия

В случае уравнений с частными производными такое происхождение имеет задача о малых колебаниях сплошной среды (струны, мембраны и т. п.). Это линейризация соответствующего уравнения динамики сплошной среды, имеющего фазовым пространством бесконечномерное пространство положений и скоростей точек среды. В линейризованных задачах о малых колебаниях сплошной среды роль оператора  $A$  играют линейные операторы с частными производными, причём они могут быть как угодно высокого порядка.

Неизвестная функция может быть не скалярной, а векторной (представьте себе, например, струну в трёхмерном пространстве: её отклонение от равновесного состояния в каждой точке — вектор, имеющий две компоненты, — координаты в нормальном струне направлении).

Для описания подобных ситуаций в общем виде следует рассмотреть векторное расслоение, база которого — многообразие независимых переменных. Значения неизвестных функций («полей», как говорят физики) определяют сечение этого расслоения. При локальном изучении можно записать всё в координатах и считать, что  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ . В физике компоненты вектора  $u$  называются полями,  $r$  — число полей,  $n = D + 1$ , где  $D$  — физическая размерность, единица отводится на время.

Линейный дифференциальный оператор в системе координат  $(x_1, \dots, x_n)$  имеет вид многочлена от операторов  $\partial/\partial x_i$  с зависящими от  $x$  коэффициентами, т. е.

$$P(\partial, x) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) \partial^\alpha,$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$



На окружности функции представляются рядами Фурье. Чем длиннее сворачиваемый в окружность отрезок, тем ближе расположены частоты, участвующие в представлении. А именно, для отрезка длины  $L$  в представлении участвуют частоты  $\chi = 2\pi l/L$  (см. рис. 12.6).

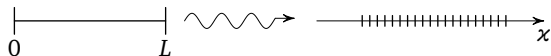


Рис. 12.6. В разложение Фурье входят близкие частоты

Следует ожидать, что при растягивании отрезка на всю прямую ряд превратится в интеграл; тем самым мнимые экспоненты образуют «континуальный базис»:  $e^{ikx}$ ,  $k$  пробегает двойственное пространство  $(\mathbb{R}^n)^*$  (в физике  $k$  называется волновым вектором). Функции  $e_k = e^{ikx}$  называют (гармоническими) плоскими волнами, они являются собственными функциями операторов сдвига и дифференцирования:

$$T_s e_k = \lambda_k e_k, \quad \lambda_k = e^{iks}, \quad \partial^\alpha e_k = (ik)^\alpha e_k.$$

Мы видим, что  $Ae_k = P(ik)e_k$ , т. е. каждая гармоническая плоская волна является собственной функцией любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, причём собственное число — многочлен от волнового вектора.

В случае  $r$  полей вычисления аналогичны: домножив экспоненту на амплитуду  $w \in \mathbb{R}^r$ , получим  $\mathcal{P}(\partial)we_k = (\mathcal{P}(ik))we_k$ . Здесь  $\mathcal{P}(ik)$  — матрица, элементы которой — многочлены.

**Упражнение.** Найдите эту матрицу для оператора Коши — Римана.

Ответ.  $\begin{pmatrix} ik_1 & -ik_2 \\ ik_2 & ik_1 \end{pmatrix}$ .

Для каждого волнового вектора  $k$  и каждого дифференциального оператора  $\mathcal{P}(\partial)$  с постоянными коэффициентами имеется, вообще говоря,  $r$  собственных векторов  $w_j$  оператора  $P(ik)$ . Каждый из них определяет гармоническую плоскую волну с волновым вектором  $k$  вида  $w_j e_k$ , являющуюся собственным вектором матричного дифференциального оператора  $A = \mathcal{P}(\partial)$ . Физически плоские волны  $w_j e_k$  с данным волновым вектором  $k$  имеют общие фронты, но различные «поляризации»  $w_j \in \mathbb{R}^r$ .

При  $r = 1$  имеем один дифференциальный оператор  $\mathcal{P}(\partial)$ , полином  $P(ik)$  от волнового вектора  $k$  называется *символом* этого оператора. Старший член символа называется *главным символом*.



Например, символ оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^n$  равен  $-k_1^2 - \dots - k_n^2$  и совпадает с его главным символом. Символ обычно обозначают буквой  $\sigma$ , например, для оператора Лапласа  $\sigma = -k^2$ .

Для матричного оператора матрица из символов называется *матричным символом* оператора.

*Символом системы* называется определитель матричного символа. Например, символ системы Коши — Римана равен

$$\det \begin{pmatrix} ik_1 & -ik_2 \\ ik_2 & ik_1 \end{pmatrix} = -k_1^2 - k_2^2,$$

т. е. совпадает с символом оператора Лапласа на плоскости.

*Главным символом системы* называется главная однородная часть её символа. В физике волн соответствующее понятие обычно называется дисперсионным соотношением.

**Замечание.** Главный символ определён инвариантно, т. е. не зависит от системы координат, использованной для его построения: он является однородным многочленом от компонент кокасательного вектора  $k$  пространства независимых переменных. Инвариантность главного символа означает независимость от системы координат его значения на каждом кокасательном векторе. Полный символ не инвариантен. Например, у оператора Лапласа после замены переменных могут добавиться члены первого порядка. Можно усмотреть инвариантность главного символа из следующих соображений (для простоты ограничимся скалярным случаем,  $r = 1$ ). Подействуем оператором на гармоническую плоскую волну  $e_k$ :

$$\mathcal{P}(\partial, x)e_k = \sigma_m(k) + \sigma_{m-1}(k) + \dots,$$

где коэффициенты полиномов могут зависеть от  $x$ . Пусть  $k \rightarrow \infty$ . Если  $\sigma_m \neq 0$ , то это главный член асимптотики значения оператора на высокочастотной плоской волне. Сделав в функции  $e_k(x)$  гладкую замену переменной  $x$ , легко проверить, что эта асимптотика зависит лишь от вектора  $k$ , но не от системы координат.

Алгебраические свойства главного символа оказывают решающее влияние на свойства соответствующего дифференциального уравнения, и в этом смысле теория дифференциальных уравнений может рассматриваться как ветвь алгебраической геометрии.

**Пример.** Пусть функцию  $f$  на многообразии можно разложить в ряд по экспонентам (например, на окружности, торе):  $f = \sum f_k e_k$ .

Ищем решение уравнения  $\Delta u = f$  в виде ряда  $u = \sum u_k e_k$ . Получаем  $-k^2 u_k = f_k$ ,  $u_k = -f_k/k^2$ . Очевидно, что ряд  $\sum u_k e_k$  сходится, более того, гладкость функции  $u$  возросла на два порядка по сравнению с гладкостью функции  $f$ .

То же рассуждение проходит для любого линейного оператора порядка  $m$  с постоянными коэффициентами, если  $|\sigma_m(k)| \geq C|k|^m$ .

Такой оператор называется *эллиптическим*. Мы видим, что из-за эллиптичности бесконечномерность задачи фактически исчезает, способ решения чисто алгебраический.

Оператор с *переменными* коэффициентами называется *эллиптическим*, если он становится эллиптическим при замораживании коэффициентов в любой точке.

**Пример.** Оператор Лапласа  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  на любом римановом многообразии (например, на поверхности сферы) является эллиптическим (докажите!).

Для эллиптического оператора  $\mathcal{P}(\partial, x)$  с переменными коэффициентами предыдущие формулы не дают точного решения уравнения  $Pu = f$ . Однако, замораживая коэффициенты, можно получить достаточно хорошее приближение к решению эллиптического уравнения  $Pu = f$  на компактном многообразии.

Выбирая в качестве  $f$  «волновые пакеты» вроде  $f = e^{-sx^2} e_k(x)$ , можно использовать при больших  $k$  приближённое решение

$$u = \frac{f}{\sigma_m(k)}.$$

Быстрое убывание  $u$  при  $k \rightarrow \infty$  гарантирует «почти конечномерность» задачи. Из-за этого теория эллиптических уравнений и краевых задач даже в случае переменных коэффициентов почти столь же близка к конечномерной линейной алгебре, как и соответствующие теории для оператора Лапласа, с которыми мы познакомились выше.

Если оператор не эллиптический (например, волновой), то этот способ непосредственно не пройдёт, но можно его модифицировать.

**Задача 1.** Найдите многообразие нулей главного символа волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

О т в е т. Это квадратичный конус в  $\mathbb{R}^3$  («световой конус»).

**Задача 2.** Пусть квадратичная форма  $\sum a_{pq}k_p k_q$  положительно определена. При каких значениях скорости  $c$  и волнового вектора  $k$  решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum a_{pq} \frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q}$$

является плоская волна  $e^{\omega t - kx}$ , бегущая в направлении вектора  $k$  со скоростью  $c$ ?

**Задача 3.** Найдите многообразие нулей главного символа системы уравнений Максвелла

а) в вакууме:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \text{rot } H, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot } E,$$

б) в однородной неинотропной среде.

Указание. См. книгу [9, гл. 7, § 5.].

**Задача 4.** Найдите многообразие нулей главного символа системы уравнений Дирака для четырёх комплексных функций  $u_j$  четырёх переменных  $x_i$ :

$$\sum_{k=1}^4 \alpha_k \left( \frac{\partial}{\partial x_k} - a_k \right) u - \beta b u = 0,$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Общая схема теории распространения волн, определяемых системами линейных уравнений с частными производными, такова.

Множество нулей главного символа является полем конусов в касательных пространствах пространства-времени. Переходя к проективизации (или к сферизации), мы получаем «гиперповерхность Френеля» медлительностей в многообразиях контактных элементов пространства-времени.

Геометрическая оптика (т. е. теория лучей и фронтов), заданная этой гиперповерхностью (см. лекцию 2), приближённо описывает (при некоторых условиях) коротковолновые асимптотики (в физике называемые также квазиклассическими), т. е. поведение волн, длина которых мала по сравнению с геометрическими размерами системы (например, с расстояниями, на которых заметно меняются коэффициенты системы).

Основным из условий является условие гиперболичности, которое состоит в следующем. Рассмотрим алгебраическую гиперповерхность степени  $d$  в  $m$ -мерном вещественном проективном пространстве. Гиперповерхность называется *гиперболической* по отношению к точке, если каждая вещественная прямая, проходящая через эту точку, пересекает гиперповерхность в  $d$  вещественных точках. Если все эти точки попарно различны, то поверхность называется *строго гиперболической*.

**Пример.** Эллипс строго гиперболичесен относительно своих внутренних точек, нестрого гиперболичесен относительно граничных точек и не гиперболичесен относительно внешних точек.

Условие гиперболичности системы состоит в том, что гиперповерхность медлительностей в проективном пространстве контактных элементов в каждой точке пространства-времени должна быть гиперболической относительно временной точки.

Здесь временная точка — это проективизация вектора  $dt$  касательного пространства к пространству-времени (соответствующий контактный элемент — касательная гиперплоскость изохроны).

Строго гиперболическая поверхность чётной степени  $2n$  состоит из  $n$  диффеоморфных сфере и расположенных один внутри другого овалов — от ближайшего к временной точке до самого далёкого. Физически эти компоненты соответствуют различным «модам» или типам волн, способных распространяться в данной среде. Например, в упругой среде бывают продольные и поперечные волны. Продольная и поперечная волны, распространяющиеся в одном и том же направлении, имеют, вообще говоря, разные скорости.

Ближайший к временной точке оваллоид соответствует самой медленной волне, следующий — более быстрой и т. д. до приходящей первой, самой быстрой волны, соответствующей самому внешнему из оваллоидов. Это видно из того, в каком порядке идут точки пересечения соответствующих конусов с вершиной  $O$  с времяподобной мировой линией  $q = c$ , расположенной рядом с  $O$ . Ближайшая к изохроне точка пересечения соответствует наименьшему времени  $t$  прихода возмущения из  $O$  в  $c$  и, следовательно, самой быстрой волне.

Следует иметь в виду, что каждому направлению соответствуют две волны одного типа: одна распространяется вперёд, а другая назад (соответствующие волновые векторы противоположны).

**Пример.** Для волнового уравнения  $2n = 2$ , мода одна и каждому направлению в физическом пространстве соответствуют ровно две волны, распространяющиеся по этому направлению в противоположные стороны.

Обоснование коротковолновых асимптотик и, в частности, перехода «физической» оптики волновых уравнений в геометрическую оптику уравнения эйконала выходит за рамки этих лекций. Замечу только, что последовательное проведение этой программы приводит к появлению в асимптотических формулах интересных топологических инвариантов — так называемых индексов Маслова, описывающих «потерю четверти волны при прохождении луча у каустики» и проявляющихся в квантовой механике в виде поправки  $1/2$  к условию квантования Бора — Зоммерфельда. Общая формулировка условий квантования приводит, таким образом, к топологическому объекту — характеристическому классу Маслова на лагранжевых подмногообразиях симплектического фазового пространства.

**Задача 5.** Перенесите формулу Вейля (асимптотику числа собственных функций с собственными числами, меньшими  $E$ ) на случай гиперболических систем.

ЛИТЕРАТУРА К ЛЕКЦИИ 12: [9].

## Приложение 1

# Топологическое содержание теоремы Максвелла о мультипольном представлении сферических функций

Здесь приведено доказательство теоремы Максвелла о мультипольном представлении сферических функций. В частности, доказывается, что функции, допускающие такое представление, образуют линейное пространство. Именно это утверждение осталось недоказанным выше (лекция 11, с. 137).

Одновременно мы докажем ряд интересных топологических и алгебраических следствий теоремы Максвелла (впервые доказанной, по-видимому, Сильвестром в малоизвестной заметке, содержащей также как основной идеологический принцип трактата Бурбаки, так и предостережение об опасности злоупотребления формализацией математики).

Вспомним утверждение теоремы (см. с. 123 и 134).

**Теорема 1.** *Ограничение на сферу  $n$ -кратной производной функции  $1/r$  вдоль  $n$  постоянных (инвариантных относительно сдвигов) векторных полей на  $\mathbb{R}^3$  совпадает с некоторой сферической функцией степени  $n$ . Любая ненулевая сферическая функция степени  $n$  может быть получена таким образом при помощи некоторого набора из  $n$  ненулевых векторных полей. По заданной функции эти поля определяются однозначно (с точностью до умножения на ненулевую константу и перестановки полей).*

Сферические функции степени  $n$  образуют линейное пространство размерности  $2n + 1$ .

Множество функций, представимых мультипольной конструкцией, описанной в теореме, априори представляется существенно нелинейным. Из теоремы вытекает, что образом соответствующего полилинейного отображения является линейное пространство. Утверждение

единственности в теореме можно переформулировать в чисто топологических терминах.

**Теорема 2.** Конфигурационное пространство  $n$  (быть может, совпадающих) неразличимых точек на вещественной проективной плоскости (т. е.  $n$ -я симметрическая степень  $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ ) диффеоморфно вещественному проективному пространству размерности  $2n$ :

$$\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^{2n}.$$

Симметрические степени неориентируемых поверхностей были (независимо от Максвелла) вычислены Ж. Дюпоном и Г. Люстигом [11].

**Замечание.** Теорема 2 родственна проективной теореме Виета

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n.$$

и является в некотором смысле её кватернионной версией.

Рассматривая сферу Римана  $\mathbb{C}P^1$  как двулистное накрытие вещественного проективного пространства, в качестве следствия получаем алгебраическое отображение  $r: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  кратности  $2^n$ , обобщающее на большие размерности классическую теорему

$$\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4.$$

## 1. Основные пространства и группы

Рассмотрим  $n$ -мерное арифметическое кватернионное пространство  $\mathbb{H}^n = \bigoplus \mathbb{H}_p^1$  с его обычной  $i$ -комплексной структурой

$$i(ae + bi + cj + dk) = ai - be + ck - dj.$$

Умножение слева на  $j$  действует на  $\mathbb{H}_p^1$ , сохраняя комплексные прямые. Оно отправляет каждую прямую в эрмитово ортогональную к ней прямую и действует на  $\mathbb{C}P_p^1 = (\mathbb{H}_p^1 \setminus 0)/\mathbb{C}^*$  как антиголоморфная инволюция  $\sigma_p$ , не имеющая неподвижных точек.

Рассмотрим группу Кокстера  $B(n)$ , действующую на произведении  $(\mathbb{C}P^1)^n$  перестановками сомножителей и отображениями  $\sigma_p$  на некоторых сомножителях.

**Теорема 3.** Пространство орбит действия  $B(n)$  на  $(\mathbb{C}P^1)^n$  является  $2n$ -мерным вещественным проективным пространством:

$$(\mathbb{C}P^1)^n/B(n) \approx \mathbb{R}P^{2n}.$$

Пространство орбит группы перестановок  $S(n)$  является, согласно теореме Виета, комплексным проективным пространством:

$$(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) = \text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n.$$

Итак, мы получили естественное отображение  $r: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  (отображающее орбиту  $\xi$  подгруппы  $S(n)$  в орбиту  $r(\xi)$  группы  $B(n)$ , содержащую  $\xi$ ).

Группа  $B(n)$  содержит также интересную подгруппу  $\mathbb{Z}_2 \times S(n)$  (перестановок и перестановок, сопровождаемых антиголоморфными инволюциями  $\sigma_p$  на каждом сомножителе). Произведение инволюций  $\sigma_p$  действует на  $(\mathbb{C}P^1)^n/S(n)$  как инволюция  $\sigma \in \mathbb{Z}_2$ .

Включения групп  $S(n) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times S(n) \rightarrow B(n)$  порождают отображения пространств орбит

$$(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \xrightarrow{\alpha} (\mathbb{C}P^1)^n/(S(n) \times \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{C}P^1)^n/B(n)$$

кратности 2 и  $2^{n-1}$  соответственно.

Инволюция

$$\sigma: (\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \rightarrow (\mathbb{C}P^1)^n/S(n)$$

переставляет прообразы  $\alpha^{-1}(\cdot)$ .

**Теорема 4.** При чётных  $n$  инволюция  $\sigma$  действует на

$$(\mathbb{C}P^1)^n/S(n) \approx \mathbb{C}P^n$$

как комплексное сопряжение  $\text{conj}$ .

Таким образом, для чётных  $n$  получаем вещественные алгебраические отображения

$$\mathbb{C}P^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}P^n/\text{conj} \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}P^{2n}$$

кратности 2 и  $2^{n-1}$  соответственно.

**Замечание.** При  $n = 2$  второе пространство является гладким (см., например, [5] и [3]; вероятно это было известно даже до публикации [3]),

$$\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4.$$

В этом случае кратность отображения  $\beta$  равна 2.

Инволюция, переставляющая два прообраза, действует на  $S^4$  как антиподальная инволюция.



Я благодарен С. Дональдсону за это замечание, показывающее, что (странная) теорема Максвелла в некотором смысле является многомерным обобщением (не менее странной) теоремы  $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4$ .

Ниже мы покажем, что теорема Максвелла доставляет явную формулу для диффеоморфизма  $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4$ .

**Замечание.** В большинстве случаев, утверждая, что два многообразия «совпадают», мы будем явно указывать только вещественный алгебраический гомеоморфизм между этими многообразиями. Педантичная проверка того, что эти гомеоморфизмы могут быть сглажены, в некоторых случаях оставляется читателю (см., однако, п. 4).

## 2. Некоторые теоремы вещественной алгебраической геометрии

Рассмотрим вещественный однородный многочлен  $f$  степени  $n$  от трёх переменных  $(x, y, z)$ . Теорема Максвелла имеет следующее странное алгебраическое следствие.

**Теорема 5.** *Любой вещественный однородный многочлен  $f$  степени  $n$  единственным образом можно представить в виде суммы двух таких многочленов, один из которых есть произведение  $n$  линейных вещественных сомножителей, а другой делится на  $x^2 + y^2 + z^2$ .*

В частности, любая вещественная алгебраическая кривая степени  $n$  в метрической проективной плоскости определяет  $n$  вещественных «главных осей», инвариантно связанных с кривой.

**Доказательство.** Вещественное уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  задаёт в  $\mathbb{C}P^2$  вещественную кривую  $S$ , не имеющую вещественных точек. Эта кривая, называемая мнимой окружностью, рациональна и топологически является сферой. Комплексное сопряжение отправляет  $S$  в себя и действует на ней как антиголоморфная инволюция, не имеющая неподвижных точек (это обычная антиподальная инволюция  $S^2$ ).

Уравнение  $f = 0$  задаёт в  $\mathbb{C}P^2$  вещественную алгебраическую кривую  $K$  степени  $n$ . Комплексное сопряжение  $\text{conj}: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  отображает  $K$  в себя и переставляет  $2n$  точек пересечения  $K$  с  $S$ .

Каждая пара сопряжённых точек пересечения задаёт прямую, их соединяющую (точки отличны друг от друга, поскольку  $\text{conj}$  не имеет неподвижных точек на  $S^2$ ). Эта прямая вещественна (поскольку  $\text{conj}$

переставляет две принадлежащие ей точки) и может быть задана некоторым уравнением  $ax + by + cz = 0$  с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим произведение  $g$  полученных таким образом  $n$  вещественных линейных функций. Мы докажем, что  $f$  пропорционально  $g$  вдоль  $S$ .

Однородный многочлен  $f$  равен нулю в  $2n$  общих точках кривых  $K$  и  $S$ . Кривая  $S$  рациональна. Выберем некоторый рациональный параметр  $t$  (например,  $x = 2t$ ,  $y = t^2 - 1$ ,  $z = i(t^2 + 1)$ ). Выбирая подходящим образом координаты, мы можем исключить случай, когда  $t = \infty$  является одной из точек пересечения  $S$  с  $K$ . Многочлены  $f(x(t), y(t), z(t))$  и  $g(x(t), y(t), z(t))$  степени  $2n$  имеют  $2n$  общих корней, причём  $g \neq 0$ . Следовательно, вдоль  $S$  выполняется равенство  $f = cg$ ,  $c = \text{const}$ .

Таким образом, однородный многочлен  $f - cg$  на  $S$  равен нулю, т. е. он имеет вид  $(x^2 + y^2 + z^2)h(x, y, z)$ , где  $h$  есть вещественный однородный многочлен степени  $n - 2$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** Единственность разложения  $f = cg + (x^2 + y^2 + z^2)h$  можно доказать независимо от доказательства существования. Предположим, что имеется второе разложение  $f = c'g' + (x^2 + y^2 + z^2)h'$ . Тогда  $c'g' - cg = (x^2 + y^2 + z^2)h''$ , где  $g$  и  $g'$  являются произведениями  $n$  линейных сомножителей. Пусть  $g = 0$  на прямой  $l$ . На этой прямой многочлен  $c'g'$  имеет  $n$  вещественных корней и равен правой части предыдущей формулы, имеющей не более  $n - 2$  вещественных корней. Таким образом,  $c'g' \equiv 0$ ,  $h'' = 0$  на  $l$ . Следовательно, мы можем разделить все три многочлена на уравнение прямой  $l$  и доказать единственность индукцией по  $n$ . (При  $n = 1$  всё очевидно, так как  $cg = c'g'$ , поскольку  $h'' = 0$ .)

Рассмотрим проективное пространство  $\mathbb{R}P^N$  вещественных алгебраических кривых степени  $n$  ( $N = n(n + 3)/2$ ).

Вещественные алгебраические кривые, состоящие из  $n$  вещественных прямых, образуют в этом проективном пространстве замкнутое вещественное алгебраическое многообразие  $T$  размерности  $2n$  (образ  $(\mathbb{R}P^2)^n$  при полилинейном отображении). Кривые, содержащие  $S$ , образуют проективное подпространство  $P = \mathbb{R}P^M$ ,  $M = (n - 2)(n + 1)/2$ . В этих терминах теорема 5 принимает следующий вид.

**Теорема 6.** Многообразия  $T$  и  $P$  в  $\mathbb{R}P^N$  зацеплены с коэффициентом зацепления 1 таким образом, что через любую точку из  $\mathbb{R}P^N$ ,

не принадлежащую объединению  $T$  с  $P$ , проходит единственная вещественная проективная прямая, связывающая  $T$  с  $P$ . Эта прямая пересекает  $T$  (так же как и  $P$ ) в одной точке.

Теперь легко доказать теорему 2.

*Доказательство теоремы 2.* Рассмотрим пространство  $H$  размерности  $M + 1$ , содержащее  $M$ -мерное проективное пространство  $P$ . Любое такое пространство пересекает  $T$ . Действительно, выберем точку  $O$  на  $H$ , не принадлежащую ни  $P$ , ни  $T$ . Прямая, соединяющая  $O$  с  $T$  и с  $P$ , принадлежит  $H$  и пересекает  $T$ .

Точка пересечения единственна. В противном случае на точке  $H$  была бы точка  $O$ , через которую проходили бы две прямые, соединяющие  $T$  с  $P$ .

Итак, мы построили гомеоморфизм между  $T \approx \text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$  и многообразием пространств  $H$  размерности  $M + 1$ , содержащих  $P$ . Последнее многообразие — это  $\mathbb{R}P^{N-M-1}$ , что (по крайней мере на топологическом уровне) доказывает теорему 2, поскольку  $N - M - 1 = 2n$ .

### 3. От алгебраической геометрии к сферическим функциям

Производные гармонической функции вдоль постоянных векторных полей, очевидно, являются гармоническими функциями. Таким образом, все кратные производные функции  $1/r$  являются гармоническими вне точки  $0$ . Следующие леммы доказаны в лекции 11.

**Лемма 1.**  *$n$ -я производная функции  $1/r$  вдоль  $n$  постоянных векторных полей имеет вид  $P/r^{2n+1}$ , где  $P$  — однородный многочлен степени  $n$ .*

**Лемма 2.** *Однородный многочлен  $P$  из леммы 1 является гармонической функцией.*

Эта лемма вытекает из классической теоремы об инверсии, которую я здесь напомним. Гармоническая функция  $P/r^{2n+1}$  является однородной степени  $-(n + 1)$ . На единичной сфере она совпадает с  $P$ . Из этого следует, что продолжение этой функции с единичной сферы на всё пространство в виде однородной функции степени  $n$  также является гармонической функцией. Это продолжение есть в точности  $P$ .

Для доказательства теоремы об инверсии рассмотрим сферический лапласиан  $\hat{\Delta}$  — оператор Лапласа  $\text{div grad}$  на единичной сфере.

Мы продолжим его на однородные функции степени  $k$  на  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  таким образом, что любая однородная функция  $F$  степени  $k$  переводится им в однородную функцию  $\tilde{\Delta}$  этой же степени.

Согласно лекции 11 (с. 125) для любой однородной функции  $F$  степени  $k$  выполняется равенство

$$\tilde{\Delta} = r^2 \Delta F - \Lambda F, \quad \text{где } \Lambda = k^2 + k(m-2).$$

Из этой формулы следует, что:

(1) ограничение гармонической однородной функции степени  $k$  на единичную сферу в  $\mathbb{R}^m$  является собственной функцией сферического лапласиана, отвечающей собственному значению  $-\Lambda$ ;

(2) собственная функция сферического лапласиана, отвечающая собственному значению  $-\Lambda$ , при продолжении её со сферы до однородной функции степени  $k$  на  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  становится гармонической;

(3) для любой степени однородности  $k$  в  $\mathbb{R}^m$  существует такая двойственная ей степень  $k' = 2 - m - k$ , что однородная гармоническая функция степени  $k$  остаётся гармонической, если мы ограничим её на сферу, а затем продолжим как однородную функцию двойственной степени. При  $m = 3$  условие двойственности имеет вид  $k + k' = -1$ .

В частности,  $P/r^{2n+1}$  из леммы 1 имеет степень  $k = -(1+n)$ ,  $m = 3$ , т. е. двойственная степень равна  $k' = n$ , откуда и следует лемма 2.

**Лемма 3.** Любую сферическую функцию степени  $n$  на  $S^2$  можно представить в виде  $f(X, Y, Z)(1/r)$ , где  $f$  — однородный многочлен степени  $n$ , а  $X = \partial/\partial x$ ,  $Y = \partial/\partial y$ ,  $Z = \partial/\partial z$ ,  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

**Доказательство.** Пространство гармонических однородных многочленов степени  $n$  линейно. В нём содержится подпространство гармонических многочленов, ограничения которых представимы в виде, указанном в лемме 3 (по леммам 1 и 2). Это пространство, очевидно, инвариантно относительно поворотов. Но представление  $SO(3)$  в пространстве сферических функций степени  $n$  неприводимо (любая функция может быть получена из многочлена Лежандра степени  $n$  при помощи поворотов и взятия линейных комбинаций повёрнутых функций).

Таким образом, подпространство из леммы 3 совпадает со всем пространством сферических функций степени  $n$ .  $\square$

**Лемма 4.** Любую сферическую функцию степени  $n$  можно представить в виде  $f_T(X, Y, Z)(1/r)$ , где  $f_T = \prod_{i=1}^n (\alpha_i X + \beta_i Y + \gamma_i Z)$  есть произведение  $n$  вещественных линейных сомножителей.

**Доказательство.** Согласно теореме 5 существует разложение

$$f(x, y, z) = f_T(x, y, z) + g(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Применяя это разложение к представлению из леммы 3, получаем

$$f(X, Y, Z) \left( \frac{1}{r} \right) = f_T(X, Y, Z) \left( \frac{1}{r} \right) + 0,$$

поскольку  $X^2 + Y^2 + Z^2 = \Delta$ , а  $\Delta(1/r) = 0$ . Таким образом, любая сферическая функция обладает мультипольным представлением из теоремы 1.  $\square$

**Лемма 5.** *Мультипольное представление единственно (т. е. многочлен  $f_T$  однозначно определён сферической функцией).*

**Доказательство.** Предположим, что  $f_T$  и  $f'_T$  — такие полностью разложимые многочлены, что

$$f_T(X, Y, Z) \left( \frac{1}{r} \right) = f'_T(X, Y, Z) \left( \frac{1}{r} \right).$$

Согласно лемме 1 (используемой  $n$  раз)

$$f_T(X, Y, Z) \left( \frac{1}{r} \right) = (c f_T(x, y, z) + r^2 g) r^{-(2n+1)}, \quad c \neq 0,$$

$$f'_T(X, Y, Z) \left( \frac{1}{r} \right) = (c' f'_T(x, y, z) + r^3 g') r^{-(2n+1)}, \quad c' \neq 0.$$

Следовательно,

$$f_T(x, y, z) - f'_T(x, y, z) = r^2 h(x, y, z).$$

Однако по теореме 5 это возможно, только если  $f_T = f'_T$ . Теорема 1, таким образом, доказана.  $\square$

## 4. Явные формулы

Кватернионное левое умножение на  $j$  отправляет вектор  $(z, w) = zj + we$  из  $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{H}^1$  в  $(\bar{w}, -\bar{z})$ . Этот вектор эрмитово ортогонален исходному.

Мы получаем, таким образом, явную формулу  $t \rightarrow -1/\bar{t}$  для антиголоморфной инволюции  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , не имеющей неподвижных точек.

Мы можем использовать пары эрмитово ортогональных прямых в  $\mathbb{C}^2$  для параметризации точек из  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ . Таким образом, мы выведем теорему 3 из теоремы 2. Далее мы выпишем явные формулы для диффеоморфизма  $\text{Sym}^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \approx \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}$  из теоремы 2, используя в качестве

координат на  $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$  наборы из  $n$  пар эрмитово ортогональных прямых в  $\mathbb{C}^2$ .

Рассмотрим сначала случай  $n = 1$ .

Каждой паре  $(z, w)$  и  $(\bar{w}, -\bar{z})$  эрмитово ортогональных векторов из  $\mathbb{C}^2$  сопоставим квадратичную форму на двойственном пространстве, являющуюся произведением линейных форм, представляемым этими векторами:

$$f = (zx + wy)(\bar{w}x - \bar{z}y) = f_0x^2 + f_1xy + f_2y^2.$$

Здесь  $(x, y)$  — координаты на двойственной плоскости  $\mathbb{C}^2$ . Таким образом, коэффициенты квадратичной формы  $f$  имеют вид

$$f_0 = z\bar{w}, \quad f_1 = w\bar{w} - z\bar{z}, \quad f_2 = -\bar{z}w.$$

Заметим, что коэффициент  $f_1$  вещественный, в то время как  $f_2 = -\bar{f}_0$ . Будем рассматривать  $f_0$  и  $f_1$  в качестве координат на пространстве  $\mathbb{R}^3$  форм  $f$ .

Умножение исходного вектора  $(z, w)$  на комплексное число приводит к умножению получающегося вектора на квадрат абсолютной величины этого числа. Таким образом, получаем отображение

$$F: \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+,$$

переводящее комплексные прямые из  $\mathbb{C}^2$  в вещественные лучи из  $\mathbb{R}^3$ .

Выборную точку  $(z, w)$  на комплексной прямой отображение  $(f_0, f_1)$  отправляет во вполне определённую точку луча. Например, выбирая  $z = t$ ,  $w = 1$ , получаем  $f_0 = t$ ,  $f_1 = t\bar{t}$ .

Если исходная точка на прямой нормирована условием

$$|z|^2 + |w|^2 = 1,$$

то её образ лежит на эллипсоиде  $|2f_0|^2 + |f_1|^2 = 1$  (который мы также можем называть сферой, рассматривая в качестве координат  $2f_0$  и  $f_1$ ).

Таким образом, сфера Римана  $\mathbb{C}P^1 = S^3/S^1$  диффеоморфизмом  $(2f_0, f_1)$  отображается на единичную сферу в  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $2f_0$  и  $f_1$ . Рассматривая  $t = z/w$  в качестве координаты на  $\mathbb{C}P^1$ , получаем отображение  $t$ -плоскости на единичную сферу в  $\mathbb{R}^3$ , являющееся в точности стереографической проекцией. Формулы, которые мы выписываем ниже, являются в этом смысле многомерными обобщениями стереографической проекции.

Заменяя исходную прямую в  $\mathbb{C}P^2$  эрмитово ортогональной, получаем изменение знака отображения  $F$ . Действительно, замена  $z$  на  $\bar{w}$ ,

а  $w$  на  $-\bar{z}$ , изменяет знак как перед  $f_0$ , так и перед  $f_1$ . Таким образом,  $F$  преобразует инволюцию  $j: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$  (отображающую каждую прямую в её эрмитово дополнение) в антиподальную инволюцию сферы  $S^2$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Применим теперь аналогичную конструкцию к  $n$ -й симметрической степени пространства  $\mathbb{R}P^2$ . Начнём с  $n$ -й симметрической степени  $\mathbb{C}P^1$ . По определению точкой этого комплексного многообразия  $\text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) \approx \mathbb{C}P^n$  является (неупорядоченное) множество, состоящее из  $n$  прямых в  $\mathbb{C}^2$ .

Выбирая  $n$  ненулевых векторов  $(z_k, w_k)$  и перемножая соответствующие линейные формы на двойственной плоскости, получим бинарную  $n$ -форму

$$H(x, y) = \prod_{k=1}^n (z_k x + w_k y) = h_0 x^n + \dots + h_n y^n.$$

Коэффициенты этой формы являются (однородными) координатами на  $\mathbb{C}P^n = \text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$  (задающими гладкую голоморфную структуру на этом пространстве).

Если  $w_k \neq 0$ , то можно положить  $w_k = 1$ . Получаем в качестве аффинных координат основные симметрические функции переменных  $\{z_k\}$ :  $h_0 = \sigma_n(z)$ ,  $\dots$ ,  $h_{n-1} = \sigma_1(z)$ ,  $h_n = 1$ . Далее будем использовать эти  $\sigma_k$  в качестве локальных координат на  $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$ .

Мы начинаем с  $n$  пар эрмитово ортогональных прямых из  $\mathbb{C}^2$ . Выберем представителя каждой пары таким образом, чтобы ни одна из выбранных прямых не совпадала ни с одной из невыбранных (в данной точке, а следовательно, и в некоторой её окрестности, где имеет силу наша система координат). Для выполнения указанного выше условия невырожденности при повторении пары достаточно всегда выбирать одну и ту же прямую.

Обозначим через  $(z_k, 1)$  векторы, задающие выбранные прямые ( $k = 1, \dots, n$ ). В качестве локальных координат на вещественном многообразии  $\text{Sym}^n(\mathbb{R}P^2)$  будем использовать (вещественные и мнимые части)  $n$  комплексных чисел  $\sigma_1(z_1, \dots, z_n)$ ,  $\dots$ ,  $\sigma_n(z_1, \dots, z_n)$ . Ортогональные прямые задаются векторами  $(1, -\bar{z}_k)$ . Построим симметризованную  $2n$ -форму

$$f = \prod_{k=1}^n (z_k x + y) \prod_{k=1}^n (x - \bar{z}_k y) = f_0 x^{2n} + \dots + f_{2n} y^{2n}.$$

Ниже мы увидим, что коэффициенты  $f_k$  являются многочленами от  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$ .





Коэффициенты  $F_k$  являются многочленами от  $\sigma_1(z), \dots, \sigma_n(z)$  и  $\tau_1 = \sigma_1(w), \dots, \tau_n = \sigma_n(w)$ . Обозначим через  $\Psi = (F_0, \dots, F_{2n})$  вектор-функцию от переменных  $\sigma$  и  $\tau$  и рассмотрим определитель матрицы

$$\left( \Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_n}, \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_n} \right).$$

Этот определитель  $\mathcal{J}(\sigma, \tau)$  в точке  $\sigma(z), \tau = \sigma(\bar{z})$  не равен нулю. Действительно, из нашего условия о несовпадении вытекает, что ни одно из  $z_k$  не совпадает ни с одним из  $-1/\bar{z}_l$ . Таким образом,  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  и  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  образуют локальную голоморфную координатную систему на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2n} = \text{Sym}^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$  в некоторой окрестности рассматриваемой точки  $\sigma, \tau = \bar{\sigma}$ , т. е. определитель  $\mathcal{J}(\sigma, \tau)$  в этой точке не равен нулю. Но определитель, для которого мы хотим доказать, что он не равен нулю, совпадает со значением  $\mathcal{J}(\sigma, \bar{\sigma})$ , поскольку  $f_{2n-k} = (-1)^{n-k} \bar{f}_k$ . Итак, мы доказали, что отображение  $\text{Sym}^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{2n}$  является локальным диффеоморфизмом.

Из п. 2 мы уже знаем, что это отображение является гомеоморфизмом. Теперь мы полностью доказали теорему 2.  $\square$

## 5. Теорема Максвелла и $\mathbb{C}\mathbb{P}^2/\text{conj} \approx S^4$

Явные формулы из п. 4 позволяют также построить диффеоморфизм сферы  $S^{2n}$  в описанное ниже пространство орбит.

Начнём с комплексного многообразия  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^n$  упорядоченных наборов из  $n$  прямых в пространстве  $\mathbb{C}^2$ . На этом многообразии рассмотрим следующее гладкое (неголоморфное) действие группы Кокстера  $D(n)$ . Элемент из  $D(n)$  действует перестановкой сомножителей, сопровождаемой заменой чётного числа прямых на их эрмитово ортогональные дополнения.

**Теорема 8.**  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$ , и соответствующий диффеоморфизм локально задаётся формулами из теоремы 7.

**Доказательство.** Заметим, что перестановки не меняют бинарную  $2n$ -форму  $f$ . Замена прямой на её дополнение меняет знак соответствующего множителя  $(z_k x + y)(\bar{z}_k y)$ . Следовательно, чётное число таких замен не меняет знака  $f$  (тогда как нечётное число замен меняет).  $\square$

Интересно, что доказанное таким образом соотношение

$$(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$$

можно рассматривать как неформальное продолжение теоремы Шевалле: пространство орбит действия вещественной  $(2n - 1)$ -мерной группы на  $\mathbb{C}^{2n}$  (которую нужно рассматривать как обобщение группы Кокстера) есть гладкое вещественное пространство  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

**Пример.** При  $n = 2$  получаем

$$(\mathbb{C}P^1)^2/D(2) \approx S^4,$$

где группа  $D(2)$ , состоящая из четырёх элементов, действует на парах прямых из  $\mathbb{C}^2$  перестановками и (возможно) заменами обеих прямых их эрмитовыми дополнениями.

Но  $(\mathbb{C}P^1)^2/S(2) \approx \text{Sym}^2(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^2$ . Следовательно,  $(\mathbb{C}P^1)^2/D(2) = \mathbb{C}P^2/(j)$ , где  $(j)$  есть замена обеих прямых их дополнениями.

Рассмотрим комплексное многообразие  $\text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}P^n$  неупорядоченных наборов из  $n$  прямых в пространстве  $\mathbb{C}^2$ . Действующая на  $\mathbb{C}P^n$  операция  $j$  замены каждой прямой на эрмитово ортогональную ей прямую является (антиголоморфной) инволюцией.

**Теорема 9.** Для чётных  $n$  инволюция  $j: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$  совпадает с комплексным сопряжением (в некоторых координатах).

**Доказательство.** Коэффициенты формы

$$H_{z,w}(x, y) = \prod_{k=1}^n (z_k x + w_k y) = \sum_{k=0}^n h_k x^{n-k} y^k$$

являются естественными (однородными) координатами на  $\mathbb{C}P^n = \text{Sym}^n(\mathbb{C}P^1)$ . Опишем действие  $j$  на коэффициентах  $h_k$ .

Перенесём действие  $j$  на двойственное пространство:

$$\bar{w}_k x - \bar{z}_k y = \overline{z_k(-\bar{y}) + w_k(\bar{x})}.$$

Таким образом, преобразованная форма задаётся формулой

$$H_{\bar{w},-\bar{z}}(x, y) = \overline{H_{z,w}(-\bar{y}, \bar{x})}.$$

В терминах коэффициентов получаем следующее выражение для преобразованной формы:

$$\sum_{k=0}^n \overline{h_k(-\bar{y})^{n-k}(\bar{x})^k} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \bar{h}_k x^k y^{n-k}.$$

Таким образом, действие  $j$  на коэффициентах формы  $H$  задаётся формулой  $(jh)_k = (-1)^k \bar{h}_{n-k}$ . Поскольку  $n$  чётно, получаем также

$(jh)_{n-k} = (-1)^k \bar{h}_k$ . Искомыми координатами являются  $h_k + h_{n-k}$  и  $i(h_k - h_{n-k})$  при чётных  $k$ , и  $h_k - h_{n-k}$  и  $i(h_k + h_{n-k})$  при нечётных  $k$  (разумеется, мы никогда не рассматриваем  $h_{n/2} - h_{n/2}$ ).

При  $n = 2$  наши результаты сводятся к явной формуле классического диффеоморфизма  $\mathbb{C}P^2/\text{conj} \approx S^4$ . «Теорема Максвелла»

$$(\mathbb{C}P^1)^n/D(n) \approx S^{2n}$$

продолжает этот диффеоморфизм на большие размерности. □

## 6. История теоремы Максвелла

Собственная версия Максвелла этой теоремы может быть найдена в его главной книге «Electricity and Magnetism», т. I, гл. IX, разделы 129–133 (см. [10, с. 222–233]).

Сильвестр критиковал его рассуждение, говоря в статье [14]: «Я немного удивлён тем, что такой заслуженный автор не обратил внимание на то, что всегда существует одна и только одна *вещественная* система полюсов, соответствующая данной гармонике...

Со всем возможным уважением к огромным способностям профессора Максвелла, я должен признаться в том, что вывод чисто аналитических свойств сферических гармоник из „теоремы Грина“ и „принципа потенциальной энергии“... как это сделано им, представляется мне неправильным методом, того же типа и настолько же убедительным, как... если бы правило извлечения квадратного корня выводили из закона Архимеда о плавающих телах».

Сильвестр предложил свой собственный подход, по-видимому, эквивалентный приведённой выше теореме 5:

«Метод полюсов для представления сферических гармоник, избранный или развитый профессором Максвеллом, на самом деле сводится к выбору подходящей канонической формы тернарной квантики, сумма квадратов переменной которой (здесь — дифференциальных операторов) равна нулю».

Тем не менее, Сильвестр не позаботился о том, чтобы детально разобрать этот вопрос («будучи очень стеснённым во времени и спеша на пароход, улывающий в Балтимор через 24 часа»). Детали доказательства появились в [13] и позднее в [9, гл. 7, § 5.].

Сильвестр упомянул о связи своей теории интегралов от произведений сферических гармоник с теоремой Айвори о притяжении эллипсоида и предложил несколько обобщений этих идей.

Представляется, что ни алгебраические, ни философские идеи этой заметки Сильвестра не были ни поняты, ни развиты математическим сообществом. Страницы, содержащие заметку, не были разрезаны в копии его «Collected Papers» в библиотеке Парижской Высшей нормальной школы.

Заметка содержит следующий (антибурбакистский) параграф:

«Никоим образом не необычно для математического исследования... что часть, в некотором смысле, больше целого — причина этого поразительного интеллектуального феномена состоит в том, что, применительно к математике, все величины и связи должны рассматриваться (как учит опыт) в состоянии непрерывного изменения, подобного течению потока».

Эта общая философия приводит его к заключению о том, что «...общее утверждение должно доказываться легче, чем любой его частный случай».

Из того, как Сильвестр пришёл к последнему заключению, мы можем вывести, что истинность этого очень важного принципа Сильвестра (заимствованного Бурбаки почти сто лет спустя) не влечёт необходимости злосчастного окаменевания «потока» математики.

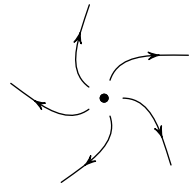
ЛИТЕРАТУРА К ПРИЛОЖЕНИЮ 1: [3], [5], [9], [10], [11], [13], [14].

## Приложение 2

### Задачи

#### 1. Материалы семинаров

**Задача 1.** Дано векторное поле  $v$  с особой точкой типа фокус (см. рисунок). Найдите все решения уравнения  $L_v u = 0$ .



**Задача 2.** Дано векторное поле  $v$ :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x.$$

На прямой  $x = 1$  задана начальная функция задачи Коши.

а) Какое необходимо условие на начальную функцию  $u|_{x=1}$ , чтобы существовало решение задачи Коши?

б) Единственно ли это решение?

**Задача 3.** Дано уравнение:

$$u_t + uu_x = 0. \tag{1}$$

а) Найдите его характеристики.

б) Покажите, что уравнение Ньютона

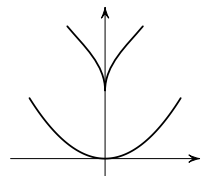
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

сводится к уравнению (1) в предположении, что  $\varphi(t)$  — положение частицы на прямой, а  $u(t, x)$  — скорость частицы, находящейся в момент  $t$  в точке  $x$  прямой.

**Задача 4.** а) Исследуйте существование и единственность решения уравнения

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1$$

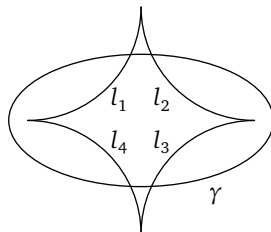
с начальным условием  $f|_{y=x^2} = 0$  в областях  $y \geq x^2$  и  $y \leq x^2$ .



б) Найдите кривую (см. рисунок), ограничивающую область единственности решения. Докажите, что эта кривая — множество центров кривизны параболы  $y = x^2$ .

в) Сделайте то же самое, но с начальным условием  $f|_{x^2 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} = 0$ .

г) Рассмотрим  $C^3$ -малое возмущение эллипса. Возмущённая кривая  $\gamma$  изображена на рисунке,  $l_1, l_2, l_3, l_4$  — длины дуг огибающей системы нормалей к  $\gamma$ . Докажите равенство:  $l_1 + l_3 = l_2 + l_4$ .



**Задача 5.** Существует ли и единственно ли решение задачи Коши

$$x(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1,$$

в окрестности точки  $(x_0, 0)$  оси  $x$ ?

### Домашнее задание

**Задача 6.** Пусть  $\alpha = du - p_1 dx_1 - p_2 dx_2$ . Докажите, что не существует трёхмерной интегральной поверхности.

**Задача 7.** Найдите характеристики в  $(2n + 1)$ -мерном пространстве 1-струй линейного однородного, неоднородного, квазилинейного уравнений.

**Задача 8.** Исследуйте существование и единственность решения задачи  $u u_x = x u_y$ ,  $u|_{x=1} = \cos y$  в окрестности точки  $(1, y_0)$ .

**Задача 9.** Найдите максимальное  $t$ , при котором решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \quad u|_{t=0} = 0$$

продолжается на  $[0, t)$ .

### Волновое уравнение, волны, уравнение Кортевега — де Фриза

**Задача 10.** Найдите характеристики волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Задача 11.** Какой вид будет иметь волновое уравнение, если в качестве координат взять характеристики?

**Задача 12.** Найдите общий вид решения волнового уравнения.

**Задача 13.** Для волнового уравнения задано начальное условие  $u|_{t=0} = u_0(x)$ . Найдите решение с данным начальным условием. Единственно ли оно?

**Задача 14.** Уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ)

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

при помощи замены  $u = \varphi(x - ct)$  (ищем решение в виде бегущей волны) превратите в обыкновенное уравнение 2-го порядка.

**Домашнее задание**

**Задача 15.** Замена координат:  $x^i = a^{ij}y_j$ . Выразите  $\frac{\partial u}{\partial x^i}$  через  $\frac{\partial u}{\partial y^i}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$  через  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^i \partial y^j}$  и обратно.

**Задача 16.** Нарисуйте фазовый портрет уравнения

$$\ddot{\varphi} = 3\varphi^2 + C\varphi + K$$

(уравнение КдФ после замены  $u = \varphi(x - ct)$ ).

**Задача 17.** Найдите на фазовой плоскости (см. задачу 16) решение в виде волны, для которой  $\varphi \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Волновое уравнение**

**Задача 18.** Докажите формулу Даламбера

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy,$$


дающую решение уравнения струны  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  с начальными условиями  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ .

В следующих задачах (№ 19–24) речь идёт о полуограниченной ( $x \geq 0$ ) струне со свободным левым концом ( $u_x(0, t) \equiv 0$ ) или закреплённым ( $u(0, t) \equiv 0$ ) левым концом.


**Задача 19.** Пусть левый конец струны закреплён и заданы начальные условия  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  для  $x \geq 0$ . Как продолжить функции  $\varphi$  и  $\psi$  на множество  $x < 0$ , чтобы ограничение решения полученной задачи Коши на область  $\{(x, t) : x \geq 0\}$  совпало с решением исходной задачи Коши?

**Задача 20.** То же самое для струны со свободным левым концом.

**Задачи 21–24.** Нарисуйте мультфильмы (т. е. изображения решений задачи Коши для различных значений  $t \geq 0$ ) для следующих начальных условий.

21.  $\varphi(x)$ : ,  $\psi(x) \equiv 0$ , конец  $x = 0$  закреплён.

22. То же самое, но конец  $x = 0$  свободен.

23.  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $\psi(x)$ : , конец  $x = 0$  закреплён.

24. То же самое, но конец  $x = 0$  свободен.

**Задача 25.** Нарисуйте мультфильмы для таких начальных условий, как в задачах 21–24, но для ограниченной ( $0 \leq x \leq l$ ) струны, для следующих случаев:

- оба конца свободны,
- оба конца закреплены,
- один конец закреплён, а другой свободен.

### Домашнее задание

**Задача 26.** Найдите общее решение задачи Коши для ограниченной струны с граничными условиями  $u|_{x=0} = f(t)$ ,  $u|_{x=l} = 0$ , если:

- $u|_{t=0} = u_t|_{t=0}$ ,
- $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $u_t|_{t=0} = \psi(x)$ .

**Задача 27.** Пусть в условиях предыдущей задачи  $f(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ .

а) Будет ли решение  $u(x, t)$  периодической функцией по  $t$  при каких-либо  $\varphi$  и  $\psi$ ?

б) Проверьте, что если  $T = (p/q)\tau$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа,  $\tau = 2l/a$ , то периодическое решение отсутствует.

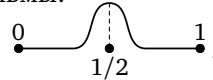
### Контрольная работа

#### ВАРИАНТ 1

1. Решите задачу Коши  $xu_x + u_y = 0$ ,  $u|_{y=0} = \sin x$ .

2. При каких значениях  $t$  решение задачи Коши  $u_t + uu_x = -x^3$ ,  $u|_{t=0} = 0$  продолжается на весь полуинтервал  $[0, t)$ ?

3. Нарисуйте мультфильмы:

а)  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $\varphi \equiv 0$ ,  $\psi$ : , конец  $x = 0$  закреплён, конец  $x = 1$  свободен;



б)  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $u|_{t=0}$ :  ,  $u_t|_{t=0} \equiv 0$ ,  $u|_{x=0} \equiv 0$ .

4. Найдите решение задачи Коши  $u_{tt} = u_{xx}$  с начальным условием  $u|_{t=0} = \sin^3 x$ ,  $u_t|_{t=0} = \sin x$ .

5. Дан ряд

$$1 + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \dots + \frac{1}{n} \cos nx + \dots$$

Является ли этот ряд рядом Фурье функции класса  $C^1$ ?

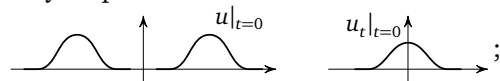
6. Пусть  $\{\varphi_k\}$  — ортонормальная система. Ряд  $\sum (f, \varphi_k) \varphi_k$  сходится к  $f$  в  $L_2$ . Выразите  $\|f\|_{L_2}$  через коэффициенты Фурье (равенство Парсеваля).

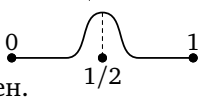
ВАРИАНТ 2

1. Исчерпываются ли решения уравнения  $x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}$  на  $\mathbb{R}^2$  функциями от  $xu$ ?

2. Найдите решение уравнения  $u u_x + x u u_y = xu$ , график которого проходит через кривую  $x = y^2 + u^2 = 1$ .

3. Нарисуйте мультфильмы:

а)  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  ;

б)  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $\varphi$ :  ,  $\psi \equiv 0$ , конец  $x = 0$  закреплён, конец  $x = 1$  свободен.

4. Решите задачу Коши  $u_{tt} = u_{xx}$  с начальными условиями  $u|_{t=0} = \cos x$ ,  $u_t|_{t=0} = \cos^3 x$ .

5. Дан ряд

$$1 + \frac{1}{2 \ln 2} \cos 2x + \dots + \frac{1}{n \ln n} \cos nx + \dots$$

Является ли этот ряд рядом Фурье функции класса  $C^1$ ?

6. Пусть  $\varphi \in C^\omega(S^1)$ , точнее, функция  $\varphi$  голоморфна в области  $|\operatorname{Im} z| < \beta$ ;  $\varphi(z + 2\pi) = \varphi(z)$ . Докажите, что  $|\alpha_k| < ce^{-\beta k}$ .

**Консервативные системы. Фигуры Лиссажу**

**Задача 28.** Дано уравнение  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ .

а) Найдите все решения.

б) Пусть решение имеет вид  $A \sin \omega t + B \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi)$ . Докажите, что  $A^2 + B^2 = C^2$ .

Далее рассматривается уравнение

$$\ddot{x} = -\nabla U(x). \quad (2)$$

**Задача 29.** Задан потенциал

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Найдите все решения уравнения (2) в виде, указанном в п. б) задачи 28.

**Задача 30.** Дан потенциал

$$U(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2.$$

Найдите все решения уравнения (2). Как ведут себя решения на плоскости  $(x_1, x_2)$ ?

**Задача 31.** Докажите, что полная энергия консервативной системы (2) есть первый интеграл этой системы.

Далее рассматривается потенциал

$$U(x) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2}.$$

Общее решение уравнения (2) при подходящем выборе начала отсчёта времени  $t$  записывается в виде

$$x_1 = A_1 \sin t, \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi).$$

**Задача 32.** Пусть  $\omega = 1$ ,  $\varphi = \pi/2$ ,  $\pi$ ,  $0$ . Как будут выглядеть фигуры Лиссажу в прямоугольнике  $|x_1| \leq A_1$ ,  $|x_2| \leq A_2$ ? Что будет происходить, если  $\varphi$  меняется от  $0$  до  $\pi$ ? Найдите коэффициенты гомотетии эллипсов  $U(x_1, x_2) = E$  и фигуры Лиссажу при  $\varphi = \pi/2$ .

**Домашнее задание**

**Задача 33.** Дан потенциал

$$U(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 7xy.$$

Решите уравнение (2).

**Задача 34.** Дан потенциал

$$U(x, y) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 x_2^2.$$

Рассмотрим эллипс  $U(x_1, x_2) \leq E$ . Пусть

$$E_1 = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^2}{2}, \quad E_2 = \frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega^2 x_2^2}{2}, \quad E = E_1 + E_2.$$

Тогда  $x_1, x_2$  лежат в полосах

$$|x_1| \leq \sqrt{2E_1}, \quad |x_2| \leq \sqrt{2E_2}.$$

Докажите, что прямоугольник

$$|x_1| \leq \sqrt{2E_1} = A_1, \quad |x_2| \leq \sqrt{2E_2} = A_2$$

вписан в эллипс  $U(x_1, x_2) \leq E$ .

**Задача 35.** Докажите, что:

- а) если  $\omega = m/n$ , то фигура Лиссажу — замкнутая кривая,
- б) если  $\omega \notin \mathbb{Q}$ , то незамкнутая.

**Задача 36.** Докажите, что если  $\omega = n$ , то существует такая фаза  $\varphi$ , что фигурой Лиссажу будет график многочлена степени  $n$  (многочлена Чебышёва) ( $p(x) = \cos(n \arccos x)$ ).

**Задача 37.** Дан эллипс  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  и дуга синусоиды  $y = 3 \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ , где  $0 \leq x \leq 8\pi$ . Докажите, что длины этих кривых равны.

### Гармонические функции

**Задача 38.** Докажите, что угол, под которым виден отрезок из точки его плоскости — гармоническая функция на накрывающей плоскости без двух концевых точек отрезка.

**Задача 39.** Постройте функцию  $f$ , гармоническую в круге и принимающую на дугах  $S_1, S_2, S_1 \cup S_2 = S^1$ , заданные значения  $C_1, C_2$ .

**Задача 40.** Решите аналогичную задачу для разбиения окружности на  $n$  дуг  $S_1, \dots, S_n$ ; значения на дугах  $C_1, \dots, C_n$ .

**Задача 41.** Запишите уравнения Ньютона движения свободной частицы в полярной системе координат.

### Домашнее задание

**Задача 42.** Докажите, что лагранжианы  $L_1 = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$ ,  $L_2 = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$  доставляют наименьшее действие на одной и той же кривой (кратчайшей, соединяющей две точки).

**Задача 43.** Вычислите  $\Delta$  в полярных и сферических координатах.

**Задача 44.** Докажите, что величина телесного угла, под которым виден из подвижной точки пространства фиксированный замкнутый контур в  $\mathbb{R}^3$ , — гармоническая на накрывающем дополнении к этому контуру многообразии функция этой подвижной точки.

## 2. Задачи письменного экзамена

1995 год<sup>1</sup>

1 (1). Является ли гладкой поверхность в евклидовом пространстве

$$z = r^2 + \frac{2}{r} \quad (3)$$

(где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ )? Выпукла ли она? Найдите её кривизну.

2 (2). Найдите значение в начале координат потенциала двойного слоя плотности 1, распределённого вдоль поверхности (3).

3 (1, 2, 3, 3, 6). Вычислите средние значения по поверхности (3) следующих функций:

а)  $z$ ; б)  $1/r$ ; в)  $z/r^3$ ; г)  $r^2$ ; д)  $1/r^3$ .

4 (5). Решите внутреннюю задачу Дирихле с краевым условием  $u = 1/r^3$  на поверхности (3) (для уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$ ).

5 (5). Рассмотрим потенциал простого слоя плотности  $z$ , распределённого по поверхности (3). Найдите среднее значение этого потенциала по поверхности сферы  $r^2 = 1$ .

6 (2, 4). Найдите верхнюю и нижнюю грани интеграла Дирихле

$$\iiint (\text{grad } u)^2 dx dy dz$$

по области, ограниченной поверхностью (3), на множестве гладких функций в замыкании этой области, совпадающих с  $r^2$  на её границе.

7 (6). Найдите при малых  $|t|$  значение в точке  $(x = y = 0, z = 1/2)$  решения  $f$  уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \text{ grad } u) = f^2$$

с начальным условием ( $f \equiv 1$  при  $t = 0$ ), где  $u$  — решение задачи 4.

У к а з а н и е. Для этого не обязательно знать ответ задачи 4, задачу 7 можно решать независимо.

1996 год

1. Дано векторное поле

$$v(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

<sup>1</sup> Рядом с номером каждой задачи в скобках указано количество баллов за правильное решение задачи (частей задачи). Предполагаемые критерии отметок при трёхчасовом экзамене: удовлетворительно — 12, хорошо — 16, отлично — 26 (при максимуме 40).

и функция  $u|_{x=1} = f(y)$ . При каком условии на  $f$  в окрестности точки  $(1, 0)$  существует решение задачи Коши для уравнений  $L_v u = 0$ ? Единственно ли оно?

2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -\nabla U(x), \quad (4)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2$ . При каких (вещественных) значениях  $a$  все решения уравнения (4) периодичны?

3. На двух прямых в  $\mathbb{R}^3$  распределён электрический заряд: на прямой  $z = 1$ ,  $y = x$  — с плотностью 1 и на прямой  $z = -1$ ,  $y = -x$  — с плотностью  $-1$ . Найдите эквипотенциальные поверхности поля, созданного этими зарядами.

4. На сфере  $S^2: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  задана функция  $v$ , гармоническая всюду, кроме точки  $N = (0, 0, 1)$ . Пусть  $\mathbb{R}^2$  — плоскость  $z = 0$  и

$$p: S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2$$

— стереографическая проекция. Пусть

$$u(x, y) = v(p^{-1}(x, y)).$$

Докажите, что

$$\int_0^{2\pi} u_r(1, \varphi) d\varphi = 0.$$

## Литература

- [1] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2012.
- [2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989; М.: URSS, 2016.
- [3] Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырёхмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функциональный анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 3. С. 1–9.
- [4] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.
- [5] Арнольд В. И. Разветвлённое накрытие  $CP^2 \rightarrow S^4$ , гиперболичность и проактивная топология // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 36–47.
- [6] Вариационные принципы механики. Сборник статей / Под ред. Л. С. Полака. М.: Физматгиз, 1959.
- [7] Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1963.
- [8] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.
- [9] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
- [10] Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 1. М.: Наука, 1989.
- [11] Dupont J. L., Lusztig G. On manifolds satisfying  $w_1^2 = 0$  // Topology. 1971. Vol. 10. P. 81–92.
- [12] Massani P. R. Norbert Wiener. 1894–1964. Basel: Birkhäuser, 1990.
- [13] Ostrowski A. Die Maxwell'sche Erzeugung der Kugelfunktionen // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1925. Vol. 33. P. 245–251.
- [14] Sylvester J. J. Note on spherical harmonics // Philosophical Magazine. 1876. Vol. 2. P. 291–307; см. также в кн.: «The Collected Mathematical Papers of J. J. Sylvester». Vol. 3. Cambridge Univ. Press, 1909. P. 37–51.

## Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; [biblio.mccme.ru](http://biblio.mccme.ru)

Книга — почтой: <http://biblio.mccme.ru/shop/order>

Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>

### Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; [www.umlit.ru](http://www.umlit.ru), [www.textbook.ru](http://www.textbook.ru), [абрис.рф](http://абрис.рф)
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; [www.kniga.ru](http://www.kniga.ru)

### Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; [www.mdk-arbat.ru](http://www.mdk-arbat.ru)
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; [www.bookmg.ru](http://www.bookmg.ru)
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; [www.arg.ru](http://www.arg.ru)
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; [www.uchebnik.com](http://www.uchebnik.com)
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; [www.shkolkniga.ru](http://www.shkolkniga.ru)
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, [www.urss.ru](http://www.urss.ru)
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

### Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; [k\\_i@bk.ru](mailto:k_i@bk.ru), [k\\_i@petroglyph.ru](mailto:k_i@petroglyph.ru)
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

### Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, [www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)

### Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; [df-a1-e1@bk.ru](mailto:df-a1-e1@bk.ru)